

Übertragungsfunktion $\rightarrow H(s)$

Frequenzgang $\rightarrow H(j\omega)$

Beispiel: RLC-Netzwerk

$$\underline{X}_R = R, \underline{X}_L = j\omega L, \underline{X}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \Leftrightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

Amplitudengang:

$$\begin{aligned} \frac{|1|}{|1 + j\omega RC - \omega^2 LC|} &= \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\omega^2 LC + \omega^4 L^2 C^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 \cdot \left(\omega^2 L^2 + R^2 - \frac{2L}{C}\right)}} \end{aligned}$$

Übertragungsfunktion ($s = j\omega$, Achtung: $s^2 = (j\omega)^2 \triangleq -\omega^2$)

$$H(s) = \frac{1}{1 + RCs + LCs^2}$$

- Die Ordnungszahl des Systems entspricht der höchsten Potenz für s
- Ein RLC-Netzwerk ist daher ein System 2. Ordnung

Sprungantwort

- Statt einem Dirac-Impuls wird ein Einheitssprung auf das System gegeben und dessen Systemantwort ausgewertet

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } t \geq 0 \\ 0, & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \varepsilon(t) &= \delta(t) \\ G(s) &= \frac{1}{s} \cdot H(s) \end{aligned}$$

$$g(t) \circ - \bullet G(j\omega)$$

$$g(t) \circ - \bullet G(s)$$

Pole und Nullstellen

- Berechnung der Nullstellen in Zähler und Nenner der Übertragungsfunktion
 - o Zähler-Nullstellen = Nullstellen
 - o Nenner-Nullstellen = Polstellen

Beispiel: RLC-Netzwerk

Nullstellen-Berechnung:

$1 = 0 \Rightarrow L = \emptyset \rightarrow$ es gibt keine Nullstellen im System

Polstellen-Berechnung:

$$LC \cdot s^2 + RC \cdot s + 1 = 0$$

$$s^2 + \frac{R}{L} \cdot s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_{P1,P2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Fallunterscheidung:

1. Wurzelterm negativ \rightarrow es gibt 2 komplex konjugierte Polstellen
2. Wurzelterm = 0 \rightarrow es gibt 1 reelle Polstelle mit der Wertigkeit 2
3. Wurzelterm positiv \rightarrow es gibt 2 reelle Nullstellen (an der Imaginärachse spiegelbar)

$$\rightarrow H(s) = \frac{1}{(s - s_{P1}) \cdot (s - s_{P2})} \cdot \frac{1}{LC}$$

- Man erhält durch s_{P1} und s_{P2} die (komplexen) Koordinaten der Nullstellen bzw. der Pole \rightarrow Darstellung durch Kreuze (Polstellen) und Kreise (Nullstellen) in der komplexen s-Ebene

$$\rightarrow s = \sigma + j\omega \Rightarrow \Re(s) = \sigma, \Im(s) = j\omega$$

\rightarrow Auswertung der imaginären Achse ergibt den Frequenzgang des Systems

- Es gibt 3 mögliche Fälle bei stabilen Systemen:

- o Pol (links) $\rightarrow s_{Pi} = -|a| + jb$
- o Nullstelle (links) $\rightarrow s_{Ni} = -|a| + jb$
- o Nullstelle (rechts) $\rightarrow s_{Ni} = |a| + jb$

Bedeutung der Polstellen und Nullstellen für den Frequenzgang:

- Vektor ziehen von Polstelle zu einem beliebigen Wert für $j\omega$

$$|c_{P1}| = |j\omega - s_{P1}| = \sqrt{a^2 + (\omega - b)^2}$$

$$c_{P1} = (j\omega - s_{P1}) = |j\omega - s_{P1}| \cdot e^{j\omega\varphi_{P1}}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{|j\omega - s_{P1}|} \cdot e^{-j\omega\varphi_{P1}}$$

- ➔ Betrag der Frequenz bei Polstelle am größten, weil $|j\omega - s_{p1}|$ sehr klein wird ➔ umgekehrt bei Nullstellen (Betrag am kleinsten)
- ➔ Einfluss der Nullstellen und Polstellen kann anhand der Nähe zur $j\omega$ -Achse ermittelt werden

Bodediagramm:

- Möglichkeit der logarithmierten Darstellung ohne Kurven zeichnen zu müssen
- ➔ dB-Skala ($20 \cdot \log(|H|)$) und logarithmische Frequenzskala ($\log(\omega)$)

Digitale Signale

Fourier-Transformation der abgetasteten Signale

$$X_A(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT) \cdot e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Zur Erinnerung:

$$\delta(t) \circ - \bullet 1$$

$$\delta(t - nT) \circ - \bullet 1 \cdot e^{-j\omega nT}$$

$$X_A(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot 1 \cdot e^{-j\omega nT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega nT}$$

$$X_A(e^{j\omega T}) = X_A(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-jn\Omega}$$

Merksatz:

Diskrete Signale haben ein periodisches Spektrum, periodische Signale haben ein diskretes Spektrum.

Diskrete Fourier-Transformation

- FTA nicht praxistauglich, weil unendliche Summe
- DFT beschränkt den untersuchten Bereich ➔ „Abtastung der FTA“
- Blocklänge N (Anzahl der Werte, die analysiert werden)
- Einführung von diskreten Zeit- und Frequenzvariablen:

- o $NT = \text{Zeitlänge}$

- o $2\pi \cdot f = \omega \rightarrow \frac{2\pi \cdot k}{NT}$

- ➔ FTA ➔ gefenstert ➔ mit diskreter Frequenzvariable ➔ DFT

Formel für die DFT:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

Formel für die Rücktransformation:

$$x[n] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

Eigenschaften der DFT:

- DFT ist komplex konjugiert → von hinten wie von vorne aus gesehen erhält man dieselben Werte
- Der Wert für N muss groß genug sein, um eine Annäherung an das Spektrum möglich zu machen