Übertragungsfunktion → $H(s)$

Frequenzgang → $H(j\omega)$

Beispiel: RLC-Netzwerk

$$\underline{X}_R = R,\ \underline{X}_L = j\omega L,\ \underline{X}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)\cdot\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \Leftrightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega C}\cdot\frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

Amplitudengang:

$$\frac{|1|}{|1 + j\omega RC - \omega^2 LC|} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega RC\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\omega^2 LC + \omega^4 L^2 C^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 \cdot \left(\omega^2 L^2 + R^2 - \frac{2L}{C}\right)}}$$

Übertragungsfunktion ($s = j\omega$, Achtung: $s^2 = (j\omega)^2 \triangleq -\omega^2$)

$$H(s) = \frac{1}{1 + RCs + LCs^2}$$

- Die Ordnungszahl des Systems entspricht der höchsten Potenz für s
- Ein RLC-Netzwerk ist daher ein System 2. Ordnung

<u>Sprungantwort</u>

- Statt einem Dirac-Impuls wird ein Einheitssprung auf das System gegeben und dessen Systemantwort ausgewertet

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, \mathit{für}\ t \geq 0 \\ 0, \mathit{für}\ t < 0 \end{cases} \qquad \frac{d}{dt}\varepsilon(t) = \delta(t)$$

$$G(s) = \frac{1}{s}\cdot H(s)$$

$$g(t) \circ\!-\!\bullet\, G(j\omega)$$

$$g(t) \circ\!-\!\bullet\, G(s)$$

Pole und Nullstellen

- Berechnung der Nullstellen in Zähler und Nenner der Übertragungsfunktion
  - Zähler-Nullstellen = Nullstellen
  - Nenner-Nullstellen = Polstellen

Beispiel: RLC-Netzwerk

Nullstellen-Berechnung:

$1 = 0 \Rightarrow L = \varnothing$ → es gibt keine Nullstellen im System

Polstellen-Berechnung:

$$LC \cdot s^2 + RC \cdot s + 1 = 0$$

$$s^2 + \frac{R}{L} \cdot s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_{P1,P2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Fallunterscheidung:

1. Wurzelterm negativ → es gibt 2 komplex konjugierte Polstellen
2. Wurzelterm = 0 → es gibt 1 reelle Polstelle mit der Wertigkeit 2
3. Wurzelterm positiv → es gibt 2 reelle Nullstellen (an der Imaginärachse spiegelbar)

➔ $H(s) = \frac{1}{(s - s_{P1}) \cdot (s - s_{P2})} \cdot \frac{1}{LC}$

- Man erhält durch s_{P1} und s_{P2} die (komplexen) Koordinaten der Nullstellen bzw. der Pole → Darstellung durch Kreuze (Polstellen) und Kreise (Nullstellen) in der komplexen s-Ebene

➔ $s = \sigma + j\omega \Rightarrow \Re(s) = \sigma, \Im(s) = j\omega$

➔ Auswertung der imaginären Achse ergibt den Frequenzgang des Systems

- Es gibt 3 mögliche Fälle bei stabilen Systemen:
  - Pol (links) → $s_{Pi} = -|a| + jb$
  - Nullstelle (links) → $s_{Ni} = -|a| + jb$
  - Nullstelle (rechts) → $s_{Ni} = |a| + jb$

Bedeutung der Polstellen und Nullstellen für den Frequenzgang:

- Vektor ziehen von Polstelle zu einem beliebigen Wert für $j\omega$

$$|\underline{c}_{P1}| = |j\omega - s_{P1}| = \sqrt{a^2 + (\omega - b)^2}$$

$$\underline{c}_{P1} = (j\omega - s_{P1}) = |j\omega - s_{P1}| \cdot e^{j\omega\varphi_{P1}}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{|j\omega - s_{P1}|} \cdot e^{-j\omega\varphi_{P1}}$$

➔ Betrag der Frequenz bei Polstelle am größten, weil $\left|j\omega - s_{P1}\right|$ sehr klein wird → umgekehrt bei Nullstellen (Betrag am kleinsten)

➔ Einfluss der Nullstellen und Polstellen kann anhand der Nähe zur $j\omega$-Achse ermittelt werden

Bodediagramm:

- Möglichkeit der logarithmierten Darstellung ohne Kurven zeichnen zu müssen

➔ dB-Skala ($20 \cdot \log\left(\left|H\right|\right)$) und logarithmische Frequenzskala ($\log\left(\omega\right)$)

Digitale Signale

<u>Fourier-Transformation der abgetasteten Signale</u>

$$X_A\left(j\omega\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(t\right) \cdot \delta\left(t - nT\right) \cdot e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(nT\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - nT\right) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Zur Erinnerung:

$\delta\left(t\right) \circ\!-\!\bullet\, 1$

$\delta\left(t - nT\right) \circ\!-\!\bullet\, 1 \cdot e^{-j\omega nT}$

$$X_A\left(j\omega\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(nT\right) \cdot 1 \cdot e^{-j\omega nT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left[n\right] \cdot e^{-j\omega nT}$$

$$X_A\left(e^{j\omega T}\right) = X_A\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left[n\right] \cdot e^{-jn\Omega}$$

Merksatz:
Diskrete Signale haben ein periodisches Spektrum, periodische Signale haben ein diskretes Spektrum.

<u>Diskrete Fourier-Transformation</u>

- FTA nicht praxistauglich, weil unendliche Summe
- DFT beschränkt den untersuchten Bereich → „Abtastung der FTA“
- Blocklänge N (Anzahl der Werte, die analysiert werden)
- Einführung von diskreten Zeit- und Frequenzvariablen:
  - NT = Zeitlänge
  - $2\pi \cdot f = \omega \rightarrow \frac{2\pi \cdot k}{NT}$

➔ FTA → gefenstert → mit diskreter Frequenzvariable → DFT

Formel für die DFT:

$$X\left[k\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x\left[n\right] \cdot e^{-j2\pi \cdot \frac{kn}{N}}$$

Formel für die Rücktransformation:

$$x[n] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{-j2\pi \cdot \frac{kn}{N}}$$

Eigenschaften der DFT:

- DFT ist komplex konjugiert → von hinten wie von vorne aus gesehen erhält man dieselben Werte
- Der Wert für N muss groß genug sein, um eine Annäherung an das Spektrum möglich zu machen