

Rekursive / Nichtrekursive Systeme:

- A-Koeffizienten für Feedbackpfad
- B-Koeffizienten für Feed Forward Pfad
- Das Erscheinen von $y[n]$ in der Differenzgleichung zeigt ein rekursives System
- Sonderfall: All-Pole-Systeme (ohne Feed Forward) und All-Zero-Systeme (ohne Feedbackpfad = nichtrekursive Systeme)

Sonderfall: FIR-System

- Die Koeffizienten des FIR Systems entsprechen der Impulsantwort

$$y[n] = \sum_{i=0}^M b_i \cdot x[n-i] \rightarrow \text{Signal durch Dirac ersetzen} \rightarrow y[n] = \sum_{i=0}^M b_i \cdot \delta[n-i]$$

- Dieses Prinzip gilt für größere Gleichungen genauso → $y[0]$ einsetzen und ausrechnen, usw.

Dirac-Impuls für diskrete Systeme:

- Der Flächeninhalt eines Dirac-Impulses sollte 1 betragen
- Die Fläche beim diskreten Signal $[1, 0, 0, 0]$ wäre gleich der Periodendauer T
- Korrekt müsste der Dirac-Impulse im diskreten $\left[\frac{1}{T}, 0, 0, 0\right]$ lauten

Frequenzgang:

$$h(t) \circ - \bullet H(j\omega) (\rightarrow FT)$$

$$h[n] \circ - \bullet H(e^{j\Omega}) (\rightarrow FTA)$$

Übertragungsfunktion:

$$h(t) \circ - \bullet H(s) (\rightarrow LT)$$

$$h[n] \circ - \bullet H(z) (\rightarrow ZT)$$

z-Übertragungsfunktion:

$$x[n] + x[n-1] \circ - \bullet X(z) + X(z) \cdot z^{-1}$$

→ Aus der Differenzgleichung kann man den Frequenzbereich direkt hinschreiben

$$y[n] \circ - \bullet Y(z)$$

Beispiel: System erster Ordnung mit Feedback und Feed Forward Pfad

$$y[n] = 1,5 \cdot (x[n] + 0,5 \cdot y[n-1]) + 2 \cdot x[n-1]$$

$$= 1,5 \cdot x[n] + 2 \cdot x[n-1] + 0,75 \cdot y[n-1]$$

$$Y(z) = 1,5 \cdot X(z) + 2 \cdot X(z) \cdot z^{-1} + 0,75 \cdot Y(z) \cdot z^{-1}$$

$$Y(z)(1 - 0,75 \cdot z^{-1}) = (1,5 + 2 \cdot z^{-1}) \cdot X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1,5 + 2 \cdot z^{-1}}{1 - 0,75 \cdot z^{-1}}$$

Koeffizienten des Systems: $b_0 = 1,5$; $b_1 = 2$; $a_0 = 1$; $a_1 = -0,75$

Übergang zum Frequenzgang: ($z \rightarrow e^{j\Omega}$)

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1,5 + 2 \cdot e^{-j\Omega}}{1 - 0,75 \cdot e^{-j\Omega}}$$

Beispiel 2:

$$y[n] = 1,5 \cdot x[n] - 0,5 \cdot y[n-1]$$

$$Y(z) = 1,5 \cdot X(z) - 0,5 \cdot Y(z) \cdot z^{-1}$$

$$Y(z) \cdot (1 + 0,5 \cdot z^{-1}) = 1,5 \cdot X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1,5}{1 + 0,5 \cdot z^{-1}}$$

Koeffizienten des Systems: $b_0 = 1,5$; $a_0 = 1$; $a_1 = 0,5$

Frequenzgang:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1,5}{1 + 0,5 \cdot e^{j\Omega}}$$

$$|H(e^{j\Omega})| = \frac{1,5}{|1 + 0,5 \cdot e^{j\Omega}|}$$

$$|1 + 0,5 \cdot e^{j\Omega}| = |1 + 0,5 \cdot \cos(\Omega) - 0,5j \sin(\Omega)|$$

$$= \sqrt{(1 + 0,5 \cdot \cos(\Omega))^2 + (-0,5 \cdot \sin(\Omega))^2}$$

$$= \sqrt{1 + \cos(\Omega) + 0,25 \cdot \cos(\Omega)^2 + 0,25 \cdot \sin(\Omega)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \cos(\Omega) + 0,25 \cdot (\sin(\Omega)^2 + \cos(\Omega)^2)}$$

$$= \sqrt{1,25 + \cos(\Omega)}$$

$$|H(e^{j\Omega})| = \frac{1,5}{\sqrt{1,25 + \cos(\Omega)}} \quad (\Omega \rightarrow \omega T = 2\pi f)$$

Pole & Nullstellen:

$$H(z) = \frac{1,5}{1+0,5 \cdot z^{-1}} = \frac{1,5}{1+0,5 \cdot \frac{1}{z}} = \frac{1,5 \cdot z}{z+0,5}$$

Nullstellen \rightarrow Zähler = 0 $\rightarrow z_n = 0$

Polstellen \rightarrow Nenner = 0 $\rightarrow z_p = -0,5$

$$H(z) = \frac{1,5(z - z_n)}{z - z_p} = \frac{1,5 \cdot z}{z + 0,5}$$

Pol-Nullstellen Diagramme:

- Bei Laplace Transformation (kontinuierliche Systeme) \rightarrow s-Ebene \rightarrow Stabilität gegeben, wenn alle Polstellen links von der imaginären Achse
- Bei z-Transformation (diskrete Systeme) \rightarrow z-Ebene \rightarrow Stabilität gegeben, wenn alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises liegen
- Polstellen geben Anhebungen im Frequenzgang an (Lage beeinflusst die Stärke der Anhebung)

Beispiel: Nichtrekursives System

$$y[n] = 2 \cdot x[n] + 3 \cdot x[n-1]$$

$$Y(z) = 2 \cdot X(z) + 3 \cdot X(z) \cdot z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 2 + 3 \cdot z^{-1}$$

$$2 + 3 \cdot z^{-1} \cdot \frac{z^1}{z^1} = \frac{2z + 3}{z}$$

Nullstellen $\rightarrow 2z + 3 = 0 \rightarrow z_n = -1,5$

Polstellen $\rightarrow z_p = 0$

\rightarrow FIR Systeme haben nur Pole im Ursprung, sie sind also immer stabil!

Zusammenfassung: Möglichkeiten, um Systeme zu beschreiben

	kontinuierlich	diskret
Impulsantwort $h(t) / h[n]$	x	x
Frequenzgang $H(j\omega) / H(e^{j\Omega})$ → Amplitudengang + Phasengang	x	x
Übertragungsfunktion $H(s) / H(z)$	x	x
Differentialgleichung	x	
Differenzgleichung		x
Blockschaltbild / Signalflussdiagramm	x	x
Pol/Nullstellen – Diagramm	x	x

Analoge Filter

Butterworth-TP → $H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \rightarrow p_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm j \frac{1}{\sqrt{2}}$

→ Polstellen liegen alle auf einem Kreis → Höhere Ordnung durch Kaskadierung der niedrigen Ordnungen

Tschebyscheff-Filter

$F(\omega^2) = \varepsilon^2 \cdot c_n^2(\omega) \rightarrow \varepsilon = \text{Ripple-Faktor (gibt den Grad der Welligkeit des Filters an)}$

→ Polstellen liegen auf einer Ellipse (Tscheb.-1) oder auf einer Geraden (Tscheb.-2)

Vom TP zum HP:

$$\omega_{TP} \Rightarrow -\frac{\omega_0^2}{\omega_{HP}}$$

Vom TP zum BP:

- Bandbreite verdoppeln → verschieben an den entsprechenden Platz im Frequenzbereich
- Multiplizieren von TP und HP