

## Analoge Filter (Fortsetzung)

Ausgangspunkt bei der Entwicklung → Anforderungen festlegen, z.B. Stempel-Matrizenschema → Festlegung des Typs (TP, HP, BP, BS)

Entwicklung eines Filters:

Aufbau → Dimensionierung des normierten TP → Grenzfrequenz festlegen → Transformation zu HP, BP, SA → Entwicklung/Realisierung von  $H(s)$  → Biquads (Faktoren verschiedener Filter) festlegen → Komponentenauswahl und Schaltungstest

BP: Es gibt immer nur BP  $2 \cdot n$ -ter Ordnung!

Vom TP zur BS: Addition von TP und HP → Parallelschaltung

### Beispiel: Transformation TP → HP

Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0}}$$
$$\downarrow s = \frac{\omega_0^2}{s_{HP}}$$

$$H(s) = \frac{1}{\frac{\omega_0^2}{1 + \frac{s_{HP}}{\omega_0}}} = \frac{\frac{s_{HP}}{\omega_0}}{s_{HP} + 1}$$

Frequenzgang

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}$$
$$\downarrow s = \frac{\omega_0^2}{j\omega_{HP}}$$

$$H(s) = \frac{1}{\frac{\omega_0^2}{1 + \frac{j\omega_{HP}}{\omega_0}}} = \frac{\frac{j\omega_{HP}}{\omega_0}}{j\omega_{HP} + 1}$$

Grenzfrequenz

$$\frac{1}{1 + j\omega RC} \Rightarrow -3 \text{ dB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega_0)^2}}$$

$$2 = 1 + (RC\omega_0)^2$$

$$\pm \frac{1}{RC} = \omega_0$$

$$\pm \frac{1}{2\pi RC} = f_0$$

## Digitale Filter

Ziel: Frequenzen selektieren, dämpfen, verstärken z.B. zur Entzerrung

Einführung:

- Aufteilung in rekursive IIR-Filter und nicht-rekursive FIR-Filter
- Aufteilung in lineare Filter (mit festen Koeffizienten und endlich vielen Parametern) und nichtlineare Filter (Koeffizienten gleichen sich dem Signal an)
- IIR-Systeme haben wählbare Pol- und Nullstellen
- Simulation von analogen Filtern durch Digitaltechnik möglich
  - ➔ Übergang durch impulsinvariante Z-Transformation, bilineare Z-Transformation oder Approximation im z-Bereich

### Impulsinvariante Z-Transformation

Vorgabe: ein Filterausgang, der digitalisiert wird, soll genau gleich dem Ausgang eines digitalen Filters sein → Fehler = 0

- Fehler hängt vom Eingangssignal ab →  $y[n] = x[n] * h[n]$
- Impuls wird als Eingang genutzt  $\delta[n] = [1, 0, 0, 0, 0]$  →  $d[n] = \left[ \frac{1}{T}, 0, 0, 0 \right]$
- Durch inverse Laplace-Transformation (→ Tabellen), Abtastung und Transformation in den z-Bereich können die Signale verglichen werden

$$y_a[n] = y_d[n] \circ - \bullet Y_d(z) = Z \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \cdot L^{-1} \{ X(s) \cdot H_a(s) \} \right\}$$

Erklärung der Formel:

$L^{-1} \{ X(s) \cdot H_a(s) \}$  → beschreibt die Berechnung des Ausgangssignals  $y_a(t)$  des analogen Filters. Diese wird per Multiplikation im Frequenzbereich durchgeführt und dann durch die inverse Laplace-Transformation wieder in den Zeitbereich überführt, damit sie abgetastet werden kann

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \cdot L^{-1} \{ X(s) \cdot H_a(s) \}$  → Abtastung des Ausgangssignals  $y_a(t)$ , man könnte

auch schreiben  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \cdot y_a(t)$ . Das Signal wird nun, mit verschobenen Diracstößen multipliziert und somit bleiben nur Abtastwerte übrig (→ Ausblendeigenschaft der Diracfunktion). Das Ergebnis dieser Berechnung ist das diskrete Signal  $y_a[nT]$ , welches auch auf der linken Seite der Gleichung zu sehen ist.

Dieses Signal kann nun mit der Z-Transformation in den Frequenzbereich überführt werden und dann mit  $Y_d(z)$  verglichen werden. Der Ausdruck könnte dann geschrieben werden als

$$Y_d(z) = Y_a(z).$$

- Berechnung der Übertragungsfunktion  $H_d(z)$  des digitalen Filters  $H_d(z) = \frac{Y_d(z)}{X(z)}$ .

➔ Durch Setzen von  $d[n]$  wird die Formel vereinfacht, weil  $X(s) = 1$  und  $X(z) = \frac{1}{T}$  ist

- Nach einsetzen ergibt sich:

$$Y_d(z) = Z \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \cdot L^{-1} \{ H_a(s) \} \right\} = Z \{ h_a[n] \}$$

Erklärung:

Da das Eingangssignal als Faktor 1 wegfällt, muss nur noch die Übertragungsfunktion  $H_a(s)$  mit der inversen Laplace-Transformation rücktransformiert werden. Man erhält  $h_a(t)$ , die Impulsantwort des analogen Filters. Diese wird nun abgetastet und dadurch zum diskreten Signal  $h_a[nT]$ . Das  $T$  fällt, sobald eine Sampllänge festgelegt ist, heraus und man erhält die diskrete Darstellung der Impulsantwort  $h_a[n]$ . Diese muss nun noch z-transformiert werden, um  $Y_d(z)$  zu erhalten.

- Auch das Bilden der Übertragungsfunktion vereinfacht sich durch Nutzung des Impulses  $d[n]$ :

$$H_d(z) = \frac{Y_d(z)}{X(z)} = \frac{Y_d(z)}{\frac{1}{T}} = T \cdot Y_d(z) = T \cdot Z \{ h_a[n] \}$$

- Der Frequenzgang des digitalen Systems ist periodisch  $\rightarrow e^{j\Omega}$   $\rightarrow$  es können Fehler durch Überlappung an den Intervallgrenzen entstehen!

Beispiel:

$$H_a(s) = \frac{A}{s - B} \rightarrow s_p = B$$

$$\downarrow = A \cdot e^{Bt} \cdot \varepsilon(t), A = 2, B = -2$$

$$H_a(j\omega) = \frac{2}{j\omega + 2} \rightarrow H_a(s) = \frac{2}{s + 2} (\rightarrow \text{stabiles System}, s_p = -2)$$

$$\rightarrow h_a(t) = 2 \cdot e^{-2t} \cdot \varepsilon(t)$$

$$\text{abtasten} \rightarrow h_d(nT) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \cdot h_a(t) = 2 \cdot e^{-2nT} \cdot \varepsilon[nT]$$

Die nun nötige z-Transformation wurde aus einer entsprechenden Tabelle entnommen.

$$\varepsilon[n] \cdot e^{-an} \rightarrow \frac{z}{z - e^{-a}} \Rightarrow H_d(z) = 2T \cdot \frac{z}{z - e^{-2T}} = \frac{2T}{1 - e^{2T} \cdot z^{-1}}$$

$$\text{Polstelle} \rightarrow z_p = e^{-2T}$$

$$\text{Koeffizienten: } b_0 = 2T, a_0 = 1, a_1 = -e^{-2T}$$

### Bilineare z-Transformation

- Substitutionsmethode  $s \rightarrow z$
- Frequenzgang des analogen Systems wird nachgebildet
- Bedingungen:
  - o Periodischer Frequenzgang
  - o Aus Polynomausdruck soll auch Polynomausdruck werden
  - o Stabiles System

Herleitung der Substitution:

$$z = e^{sT} \Rightarrow s = \frac{1}{T} \cdot \ln(z)$$

$$s = \frac{1}{T} \cdot 2 \cdot \left[ \left( \frac{z-1}{z+1} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right]$$

$$s = \frac{2z-2}{zT+T}$$

➔ Frequenzachse wird verzerrt

Zusammensetzung der Frequenzachsen:

$$\omega_d = \frac{2}{T} \cdot \arctan\left(\frac{\omega_d T}{2}\right) \qquad -\frac{\pi}{T} < 0 < \frac{\pi}{T}$$

$$\omega_a = \frac{2}{T} \cdot \tan\left(\frac{\omega_d T}{2}\right) \qquad -\infty < 0 < \infty$$

Beispiel:

$$H_a(s) = \frac{1}{2 + \frac{2s}{\omega_a}} \Rightarrow s \rightarrow \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$\Rightarrow H_d(z) = \frac{1 + z^{-1}}{2 \cdot \left(1 + \frac{2}{\omega_0 T}\right) + 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{\omega_0 T}\right) \cdot z^{-1}}$$

Koeffizienten ➔  $a_0 = 1$  sollte zutreffen, daher muss weiter umgeformt werden

→ Ergebnis:  $b_0 = 1, b_1 = 1, a_0 = 1, a_1 = \frac{1 - \frac{z}{\omega_0 T}}{1 + \frac{z}{\omega_0 T}}$

### Approximation im z-Bereich

Dieses Verfahren ist ein reines Computerverfahren.

Dem Rechner werden Werte für das geplante Filter vorgegeben (z.B. in Form von zwei Vektoren (Amplitude / Frequenz)).

Dieser versucht daraus eine Näherung mit „krummen“ Koeffizienten zu erstellen.

- Problem: hoher Rechenaufwand (Dauer) und keine Garantie für Stabilität des ermittelten Systems