Analoge Filter (Fortsetzung)

Ausgangspunkt bei der Entwicklung → Anforderungen festlegen, z.B. Stempel-Matrizenschema → Festlegung des Typs (TP, HP, BP, BS)

Entwicklung eines Filters:
Aufbau → Dimensionierung des normierten TP → Grenzfrequenz festlegen → Transformation zu HP, BP, SA → Entwicklung/Realisierung von H(s) → Biquads (Faktoren verschiedener Filter) festlegen → Komponentenauswahl und Schaltungstest

BP: Es gibt immer nur BP $2 \cdot n$ -ter Ordnung!

Vom TP zur BS: Addition von TP und HP → Parallelschaltung

Bespiel: Transformation TP → HP

Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{1+\frac{s}{\omega_0}}$$

$$\downarrow s = \frac{\omega_0^{\ 2}}{s_{HP}}$$

$$H(s) = \frac{1}{1+\frac{\frac{\omega_0^{\ 2}}{s_{HP}}}{\omega_0}} = \frac{\frac{s_{HP}}{\omega_0}}{\frac{s_{HP}}{\omega_0}+1}$$

Frequenzgang

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_0}}$$

$$\downarrow s = \frac{\omega_0^{\ 2}}{j\omega_{HP}}$$

$$H(s) = \frac{1}{1+\frac{\frac{\omega_0^{\ 2}}{j\omega_{HP}}}{\omega_0}} = \frac{\frac{j\omega_{HP}}{\omega_0}}{\frac{j\omega_{HP}}{\omega_0}+1}$$

Grenzfrequenz

$$\frac{1}{1+j\omega RC} \Rightarrow -3\,\text{dB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega_0)^2}}$$

$$2 = 1+(RC\omega_0)^2$$

$$\pm\frac{1}{RC} = \omega_0$$

$$\pm\frac{1}{2\pi RC} = f_0$$

Digitale Filter

Ziel: Frequenzen selektieren, dämpfen, verstärken z.B. zur Entzerrung

Einführung:

- Aufteilung in rekursive IIR-Filter und nicht-rekursive FIR-Filter
- Aufteilung in lineare Filter (mit festen Koeffizienten und endlich vielen Parametern) und nichtlineare Filter (Koeffizienten gleichen sich dem Signal an)
- IIR-Systeme haben wählbare Pol- und Nullstellen
- Simulation von analogen Filtern durch Digitaltechnik möglich
  - ➔ Übergang durch impulsinvariante Z-Transformation, bilineare Z-Transformation oder Approximation im z-Bereich

<u>Impulsinvariante Z-Transformation</u>

Vorgabe: ein Filterausgang, der digitalisiert wird, soll genau gleich dem Ausgang eines digitalen Filters sein → Fehler = 0

- Fehler hängt vom Eingangssignal ab → $y[n] = x[n] * h[n]$
- Impuls wird als Eingang genutzt $\delta[n] = [1, 0, 0, 0, 0]$ → $d[n] = \left[\frac{1}{T}, 0, 0, 0\right]$
- Durch inverse Laplace-Transformation (→ Tabellen), Abtastung und Transformation in den z-Bereich können die Signale verglichen werden

  $$y_a[n] = y_d[n] \circ\!-\!\bullet\, Y_d(z) = Z\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \cdot L^{-1}\left\{X(s) \cdot H_a(s)\right\}\right\}$$

  Erklärung der Formel:

  $L^{-1}\left\{X(s) \cdot H_a(s)\right\}$ → beschreibt die Berechnung des Ausgangssignals $y_a(t)$ des analogen Filters. Diese wird per Multiplikation im Frequenzbereich durchgeführt und dann durch die inverse Laplace-Transformation wieder in den Zeitbereich überführt, damit sie abgetastet werden kann

  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \cdot L^{-1}\left\{X(s) \cdot H_a(s)\right\}$ → Abtastung des Ausgangssignals $y_a(t)$, man könnte auch schreiben $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \cdot y_a(t)$. Das Signal wird nun, mit verschobenen Diracstößen multipliziert und somit bleiben nur Abtastwerte übrig (→ Ausblendeigenschaft der Diracfunktion). Das Ergebnis dieser Berechnung ist das diskrete Signal $y_a[nT]$, welches auch auf der linken Seite der Gleichung zu sehen ist.

Dieses Signal kann nun mit der Z-Transformation in den Frequenzbereich überführt werden und dann mit $Y_d(z)$ verglichen werden. Der Ausdruck könnte dann geschrieben werden als $Y_d(z) = Y_a(z)$.

- Berechnung der Übertragungsfunktion $H_d(z)$ des digitalen Filters $H_d(z) = \frac{Y_d(z)}{X(z)}$.

  ➔ Durch Setzen von $d[n]$ wird die Formel vereinfacht, weil $X(s) = 1$ und $X(z) = \frac{1}{T}$ ist

- Nach einsetzen ergibt sich:

$$Y_d(z) = Z\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \cdot L^{-1}\{H_a(s)\}\right\} = Z\{h_a[n]\}$$

Erklärung:
Da das Eingangssignal als Faktor 1 wegfällt, muss nur noch die Übertragungsfunktion $H_a(s)$ mit der inversen Laplace-Transformation rücktransformiert werden. Man erhält $h_a(t)$, die Impulsantwort des analogen Filters. Diese wird nun abgetastet und dadurch zum diskreten Signal $h_a[nT]$. Das T fällt, sobald eine Samplelänge festgelegt ist, heraus und man erhält die diskrete Darstellung der Impulsantwort $h_a[n]$. Diese muss nun noch z-transformiert werden, um $Y_d(z)$ zu erhalten.

- Auch das Bilden der Übertragungsfunktion vereinfacht sich durch Nutzung des Impulses $d[n]$:

$$H_d(z) = \frac{Y_d(z)}{X(z)} = \frac{Y_d(z)}{\frac{1}{T}} = T \cdot Y_d(z) = T \cdot Z\{h_a[n]\}$$

- Der Frequenzgang des digitales Systems ist periodisch $\rightarrow e^{j\Omega}$ → es können Fehler durch Überlappung an den Intervallgrenzen entstehen!

Beispiel:

$$H_a(s) = \frac{A}{s-B} \rightarrow s_p = B$$

$$\downarrow = A \cdot e^{Bt} \cdot \varepsilon(t), A = 2, B = -2$$

$$H_a(j\omega) = \frac{2}{j\omega + 2} \rightarrow H_a(s) = \frac{2}{s+2} \left(\rightarrow stabiles\ System, s_p = -2\right)$$

$$\rightarrow h_a(t) = 2 \cdot e^{-2t} \cdot \varepsilon(t)$$

$$abtasten \rightarrow h_d(nT) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) \cdot h_a(t) = 2 \cdot e^{-2nT} \cdot \varepsilon[nT]$$

Die nun nötige z-Transformation wurde aus einer entsprechenden Tabelle entnommen.

$$\varepsilon[n]\cdot e^{-an} \rightarrow \frac{z}{z-e^{-a}} \Rightarrow H_d(z) = 2T\cdot\frac{z}{z-e^{-2T}} = \frac{2T}{1-e^{2T}\cdot z^{-1}}$$

$$Polstelle \rightarrow z_p = e^{-2T}$$

$$Koeffizienten: b_0 = 2T, a_0 = 1, a_1 = -e^{-2T}$$

Bilineare z-Transformation

- Substitutionsmethode $s \rightarrow z$
- Frequenzgang des analogen Systems wird nachgebildet
- Bedingungen:
    - Periodischer Frequenzgang
    - Aus Polynomausdruck soll auch Polynomausdruck werden
    - Stabiles System

Herleitung der Substitution:

$$z = e^{sT} \Rightarrow s = \frac{1}{T}\cdot\ln(z)$$

$$s = \frac{1}{T}\cdot 2\cdot\left[\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5+\ldots\right]$$

$$s = \frac{2z-2}{zT+T}$$

➔ Frequenzachse wird verzerrt

Zusammensetzung der Frequenzachsen:

$$\omega_d = \frac{2}{T}\cdot\arctan\left(\frac{\omega_d T}{2}\right) \qquad -\frac{\pi}{T} < 0 < \frac{\pi}{T}$$

$$\omega_a = \frac{2}{T}\cdot\tan\left(\frac{\omega_d T}{2}\right) \qquad -\infty < 0 < \infty$$

Beispiel:

$$H_a(s) = \frac{1}{2+\frac{2s}{\omega_a}} \Rightarrow s \rightarrow \frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$\Rightarrow H_d(z) = \frac{1+z^{-1}}{2\cdot\left(1+\frac{2}{\omega_0 T}\right)+2\cdot\left(1-\frac{2}{\omega_0 T}\right)\cdot z^{-1}}$$

Koeffizienten → $a_0 = 1$ sollte zutreffen, daher muss weiter umgeformt werden

➔ Ergebnis: $b_0 = 1, b_1 = 1, a_0 = 1,\ a_1 = \dfrac{1 - \dfrac{z}{\omega_0 T}}{1 + \dfrac{z}{\omega_0 T}}$

<u>Approximation im z-Bereich</u>

Dieses Verfahren ist ein reines Computerverfahren.
Dem Rechner werden Werte für das geplante Filter vorgegeben (z.B. in Form von zwei Vektoren (Amplitude / Frequenz)).
Dieser versucht daraus eine Näherung mit „krummen" Koeffizienten zu erstellen.

➔ Problem: hoher Rechenaufwand (Dauer) und keine Garantie für Stabilität des ermittelten Systems