

## Analoge Systeme

### Signalenergie:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

### Mittlere Signalleistung:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

### Fourier Reihe

#### Rechenbeispiel:

Rechteckpulse mit der Breite  $\frac{T_p}{2}$  sind periodisch mit  $T_p = \frac{1}{f_p}$  fortgesetzt. Berechnen Sie die Fourier

Reihe dieser Funktion.

#### 1. Funktionsbestimmung:

$$x(t) = \begin{cases} A, & \text{für } -\frac{T_p}{4} \leq t \leq \frac{T_p}{4} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

→ Gerade Funktion, es entfällt die Berechnung von  $b_k$ , weil keine Sinusanteile im Signal sind.

#### 2. Berechnung der Fourier Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T_p} \cdot \int_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}} A dt = \frac{2A}{T_p} \cdot \int_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}} 1 dt = \frac{2A}{T_p} \cdot 1 \Big|_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}} = \frac{2A}{T_p} \cdot \frac{T_p}{2} = A \\ a_k &= \frac{2}{T_p} \cdot \int_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}} A \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T_p} \cdot t\right) dt = \frac{2A}{T_p} \cdot \int_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}} \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T_p} \cdot t\right) dt \\ &= \frac{2A}{T_p} \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T_p} \cdot t\right)}{k \cdot \frac{2\pi}{T_p}} \Big|_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}} = \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T_p} \cdot t\right) \Big|_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}} \\ &= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left( \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

3. Fourier Reihe und einzelne Amplituden berechnen:

$$\frac{A}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left( \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t)$$

$$a_1 = \frac{2A}{\pi}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{2A}{3\pi}, a_4 = 0, a_5 = \frac{2A}{5\pi}$$

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \cdot \left( \cos(\omega_0 \cdot t) - \frac{\cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t)}{3} + \frac{\cos(5 \cdot \omega_0 \cdot t)}{5} + \dots \right)$$

Berechnung der komplexen Fourier Reihe für die gegebene Funktion:

1. Berechnung des Fourierkoeffizienten  $\underline{c}_k$ :

$$\begin{aligned} \underline{c}_k &= \frac{1}{T_p} \cdot \int_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}} A \cdot e^{jk \frac{2\pi}{T_p} t} dt = \frac{A}{T_p} \cdot \frac{T_p}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left[ e^{jk \frac{2\pi}{T_p} t} \right]_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}} = -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left( e^{\frac{jk\pi}{2}} - e^{-\frac{jk\pi}{2}} \right) \\ &= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left( \left( \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - j \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) - \left( \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) \right) \\ &= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot 2 \cdot j \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{A}{2} \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{k \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{A}{2} \cdot \text{si}\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

## Fourier Transformation

Rechenbeispiel:

Berechnung der Fourier Transformation für einen Rechteckimpuls.

$$x(t) = \begin{cases} A, & \text{für } -\frac{T_p}{2} \leq t \leq \frac{T_p}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} A \cdot e^{-j\omega t} dt = A \cdot \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= A \cdot \frac{e^{-j\omega t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}}{-j\omega} = -\frac{A}{j\omega} \cdot \left( e^{-j\omega \frac{T}{2}} - e^{j\omega \frac{T}{2}} \right) \\
&= -\frac{A}{j\omega} \cdot \left( \left( \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right) - \left( \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right) \right) \\
&= -\frac{A}{j\omega} \cdot -2 \cdot j \cdot \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) = \frac{2A}{\omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \\
&= A \cdot T \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} = A \cdot T \cdot \text{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right)
\end{aligned}$$

Umrechnung in Betrag und Phase/Argument:

$$\begin{aligned}
|X(j\omega)| &= \sqrt{\Re\{X(j\omega)\}^2 + \Im\{X(j\omega)\}^2} \\
\arg(X(j\omega)) &= \arctan\left(\frac{\Im\{X(j\omega)\}}{\Re\{X(j\omega)\}}\right)
\end{aligned}$$

Rechenbeispiel:

Berechnung der Fourier Transformation für einen Exponentialpuls.

$$x(t) = e^{\alpha t} \cdot A \cdot \varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq t \leq \infty \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
X(j\omega) &= A \cdot \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t} dt = A \cdot \int_0^{\infty} e^{t(-\alpha-j\omega)} dt \\
&= A \cdot \frac{e^{t(-\alpha-j\omega)} \Big|_0^{\infty}}{-\alpha-j\omega} = -\frac{A}{\alpha+j\omega} \cdot \left( \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t(-\alpha-j\omega)} - 1 \right) \\
&= -\frac{A}{\alpha+j\omega} \cdot \left( \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t} - 1 \right) \xrightarrow{\alpha \geq 0} \frac{A}{\alpha+j\omega}
\end{aligned}$$

Berechnung des Betrags von  $X(j\omega)$ :

1. Konjugiert komplexe Erweiterung:

$$|X(j\omega)| = \left| \frac{A}{\alpha+j\omega} \right| = \frac{A \cdot (\alpha-j\omega)}{\alpha+j\omega \cdot (\alpha-j\omega)} = \frac{A\alpha - Aj\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = A \cdot \left( \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \cdot \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= A \cdot \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}\right)^2} = A \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} + \frac{\omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}} \\
&= A \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2 + \omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}} = A \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}} \\
&= \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}
\end{aligned}$$

2. Rechnen mit Betrag in Zähler und Nenner:

$$|X(j\omega)| = \frac{|A|}{|\alpha + j\omega|} = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

Die zweite Variante ist in diesem Fall günstiger, was aber in keinen Fall für alle Rechnungen angenommen werden kann!!