Analoge Systeme

Signalenergie:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt$$

Mittlere Signalleistung:

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt$$

Fourier Reihe

Rechenbeispiel:

Rechteckpulse mit der Breite $\frac{T_p}{2}$ sind periodisch mit $T_p = \frac{1}{f_p}$ fortgesetzt. Berechnen Sie die Fourier Reihe dieser Funktion.

1. Funktionsbestimmung:

$$x(t) = \begin{cases} A,\ \mathit{für}\ -\frac{T_p}{4} \le t \le \frac{T_p}{4} \\ 0,\ \mathit{sonst} \end{cases}$$

➔ Gerade Funktion, es entfällt die Berechnung von b_k, weil keine Sinusanteile im Signal sind.

2. Berechnung der Fourier Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{2}{T_p} \cdot \int_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}} A\ dt = \frac{2A}{T_p} \cdot \int_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}} 1\ dt = \frac{2A}{T_p} \cdot 1 \Big|_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}} = \frac{2A}{T_p} \cdot \frac{T_p}{2} = A$$

$$a_k = \frac{2}{T_p} \cdot \int_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}} A \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T_p} \cdot t\right) dt = \frac{2A}{T_p} \cdot \int_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}} \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T_p} \cdot t\right) dt$$

$$= \frac{2A}{T_p} \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T_p} \cdot t\right)}{k \cdot \frac{2\pi}{T_p}} \Bigg|_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}} = \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T_p} \cdot t\right) \Bigg|_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}}$$

$$= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-k \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

3. Fourier Reihe und einzelne Amplituden berechnen:

$$\frac{A}{2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\left(\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\cos\left(k\cdot\omega_0\cdot t\right)$$

$$a_1=\frac{2A}{\pi},\ a_2=0,\ a_3=-\frac{2A}{3\pi},\ a_4=0,\ a_5=\frac{2A}{5\pi}$$

$$x(t)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\cdot\left(\cos\left(\omega_0\cdot t\right)-\frac{\cos\left(3\cdot\omega_0\cdot t\right)}{3}+\frac{\cos\left(5\cdot\omega_0\cdot t\right)}{5}+\ldots\right)$$

Berechnung der komplexen Fourier Reihe für die gegebene Funktion:

1. Berechnung des Fourierkoeffizienten $\underline{c}_k$:

$$\underline{c}_k=\frac{1}{T_p}\cdot\int_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}}A\cdot e^{jk\frac{2\pi}{T_p}t}dt=\frac{A}{T_p}\cdot\left.\frac{T_p\cdot e^{jk\frac{2\pi}{T_p}t}}{j\cdot k\cdot 2\pi}\right|_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}}=-\frac{A}{j\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(e^{-\frac{jk\pi}{2}}-e^{\frac{jk\pi}{2}}\right)$$

$$=-\frac{A}{j\cdot k\cdot 2\pi}\cdot\left(\left(\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)-j\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)-\left(\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)+j\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$=-\frac{A}{j\cdot k\cdot 2\pi}\cdot 2\cdot j\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{A}{k\cdot\pi}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{A}{2}\cdot\frac{\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{k\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{A}{2}\cdot\mathrm{si}\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

<u>Fourier Transformation</u>

Rechenbeispiel:
Berechnung der Fourier Transformation für einen Rechteckimpuls.

$$x(t)=\begin{cases}A,\ f\ddot{u}r-\frac{T_p}{2}\leq t\leq\frac{T_p}{2}\\ 0,\ sonst\end{cases}$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot e^{-j\omega t}dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}A\cdot e^{-j\omega t}dt=A\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{-j\omega t}dt$$

$$= A \cdot \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{A}{j\omega} \cdot \left(e^{-j\omega\frac{T}{2}} - e^{j\omega\frac{T}{2}} \right)$$

$$= -\frac{A}{j\omega} \cdot \left(\left(\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right) - \left(\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right) \right)$$

$$= -\frac{A}{j\omega} \cdot -2 \cdot j \cdot \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) = \frac{2A}{\omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$= A \cdot T \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} = A \cdot T \cdot \mathrm{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Umrechnung in Betrag und Phase/Argument:

$$\left|X(j\omega)\right| = \sqrt{\Re\{X(j\omega)\}^2 + \Im\{X(j\omega)\}^2}$$

$$\arg\left(X(j\omega)\right) = \arctan\left(\frac{\Im\{X(j\omega)\}}{\Re\{X(j\omega)\}} \right)$$

Rechenbeispiel:
Berechnung der Fourier Transformation für einen Exponentialpuls.

$$x(t) = e^{\alpha t} \cdot A \cdot \varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, \; \textit{für} \; 0 \le t \le \infty \\ \quad 0, \; \textit{sonst} \end{cases}$$

$$X(j\omega) = A \cdot \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t} dt = A \cdot \int_0^\infty e^{t \cdot (-\alpha - j\omega)} dt$$

$$= A \cdot \frac{e^{t \cdot (-\alpha - j\omega)}}{-\alpha - j\omega}\Bigg|_0^\infty = -\frac{A}{\alpha + j\omega} \cdot \left(\lim_{t \to \infty} e^{t \cdot (-\alpha - j\omega)} - 1 \right)$$

$$= -\frac{A}{\alpha + j\omega} \cdot \left(\lim_{t \to \infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t} - 1 \right) \xrightarrow{\alpha \ge 0} \frac{A}{\alpha + j\omega}$$

Berechnung des Betrags von $X(j\omega)$:

1. Konjugiert komplexe Erweiterung:

$$\left|X(j\omega)\right| = \left| \frac{A}{\alpha + j\omega} \right| = \frac{A \cdot (\alpha - j\omega)}{\alpha + j\omega \cdot (\alpha - j\omega)} = \frac{A\alpha - Aj\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = A \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \cdot \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right)$$

$$= A \cdot \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right)^2} = A \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^2} + \frac{\omega^2}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^2}}$$

$$= A \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2+\omega^2}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^2}} = A \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}}$$

$$= \frac{A}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

2. Rechnen mit Betrag in Zähler und Nenner:

$$\left|X(j\omega)\right| = \frac{|A|}{|\alpha + j\omega|} = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

Die zweite Variante ist in diesem Fall günstiger, was aber in keinen Fall für alle Rechnungen angenommen werden kann!!