

Fortsetzung der Z-Transformation

$$x[n] \circ - \bullet X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-jn\Omega}$$

$$x[nT - T] \circ - \bullet X(e^{j\Omega}) \cdot e^{-j\omega T} = X(e^{j\Omega}) \cdot e^{-j\Omega}$$

$$x[n-1]$$

$$\Rightarrow j\omega \Rightarrow s = \sigma + j\omega$$

$$x[n] \circ - \bullet X(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{nsT}$$

$$x[n-1] \circ - \bullet X(s) \cdot e^{-sT}$$

$$x[n-1] \circ - \bullet X(z) \cdot z^{-1}$$

$$x[n] \circ - \bullet X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

➔ Diskrete LTI-Systeme können nur addieren, multiplizieren und verzögern!

➔ z^{-1} ➔ Signal um eine Abtastperiode verzögert

$$\delta[n] = [1, 0, 0, 0, 0] \circ - \bullet X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} = 1 \cdot z^0 = 1$$

$$\begin{aligned} \varepsilon[n] = [1, 1, 1, 1, 1] \circ - \bullet X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon[n] \cdot z^{-n} = 1 \cdot z^0 + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} \\ &\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \quad (\text{für } |z| < 1) \end{aligned}$$

Beweis durch Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} 1 \quad : (1 - z^{-1}) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \\ \underline{-1 + z^{-1}} \\ \quad z^{-1} \\ \underline{-z^{-1} + z^{-2}} \\ \quad \quad z^{-2} \\ \underline{\quad z^{-2} + z^{-3}} \\ \quad \quad \quad \vdots \end{array}$$

Im kontinuierlichen Zeitbereich ist die Ableitung des Einheitssprungs der Dirac-Impuls. Im diskreten Zeitbereich wird dies über Differenzen berechnet.

$$\delta[n] = \varepsilon[n] - \varepsilon[n-1] \circ - \bullet X_s(z) = X_\varepsilon(z) - X_\varepsilon(z) \cdot z^{-1} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$= \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}} = 1$$

$$\delta[n] \circ - \bullet 1$$

Beispielrechnung zur Z-Transformation:

$$x[n] = [0, 1, 2, 3, 2, 1, 0]$$

$$x[n] = \begin{cases} n+1, & \text{für } 0 \leq n < 2 \\ -n+5, & \text{für } 3 \leq n < 5 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^2 (n+1) \cdot z^{-n} + \sum_{n=3}^5 (-n+5) \cdot z^{-n}$$

$$= 1 \cdot z^0 + 2 \cdot z^{-1} + 3 \cdot z^{-2} + 2 \cdot z^{-3} + 1 \cdot z^{-4} + 0 \cdot z^{-5}$$

$$= \delta[n] + 2 \cdot \delta[n-1] + 3 \cdot \delta[n-2] + 2 \cdot \delta[n-3] + \delta[n-4]$$

Ein Dreieck ist das Ergebnis einer Faltung zweier Rechtecke im Zeitbereich, es muss also auch das Ergebnis einer Multiplikation zweier in den Frequenzbereich transformierter Rechtecke sein.

$$x_1[n] = [1, 1, 1] = x_2[n]$$

$$x_1[n] = \varepsilon[n] - \varepsilon[n-3] \circ - \bullet X_1(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-3}} = \frac{1-z^{-3}}{1-z^{-1}}$$

$$X_1(z) \cdot X_2(z) = \left(\frac{1-z^{-3}}{1-z^{-1}} \right)^2 = \frac{(1-z^{-3})^2}{(1-z^{-1})^2} = \frac{1-2 \cdot z^{-3} + z^{-6}}{1-2 \cdot z^{-1} + z^{-2}}$$

Dividiert man das Ergebnis per Polynomdivision, erhält man als Ergebnis die Z-Transformierte des Dreiecks, welche zuvor berechnet worden ist.

Weiteres Beispiel zur Z-Transformation:

$$x_1[n] = [3, 2, 1] \circ - \bullet X_1(z) = 3 + 2 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2}$$

$$x_2[n] = \left[1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \circ - \bullet X_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1} + \frac{1}{2} \cdot z^{-2}$$

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] \circ - \bullet Y(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

$$\begin{aligned}
& (3 + 2 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2}) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1} + \frac{1}{2} \cdot z^{-2}\right) \\
&= 3 - \frac{3}{2} \cdot z^{-1} + \frac{3}{2} \cdot z^{-2} + 2 \cdot z^{-1} - z^{-2} + z^{-3} + z^{-2} - \frac{1}{2} \cdot z^{-3} + \frac{1}{2} \cdot z^{-4} \\
&= 3 + \frac{1}{2} \cdot z^{-1} + \frac{3}{2} \cdot z^{-2} + \frac{1}{2} \cdot z^{-3} + \frac{1}{2} \cdot z^{-4}
\end{aligned}$$

Aus der Rücktransformation ergibt sich im Zeitbereich:

$$y[n] = \left[3, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = 3 \cdot \delta[n] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n-1] + \frac{3}{2} \cdot \delta[n-2] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n-3] + \frac{1}{2} \cdot \delta[n-4]$$

Das Ergebnis der Faltung ist $2N-1$ lang, wenn N die Länge der Einzelsignale ist.

Digitale Systeme

Ableitung für zeitkontinuierliche Signale:

$$\frac{d}{dt} x(t) \circ - \bullet j \cdot \omega \cdot X(j\omega)$$

Beispiel RC-Netzwerk:

$$\text{Es ergibt sich eine DGL} \rightarrow u_2(t) = \frac{1}{RC} \cdot \int u_1(t) dt - \frac{1}{RC} \cdot \int u_2(t) dt$$

In diskreten Systemen wird der Differenzenquotient wie bei der Herleitung der Ableitung ermittelt, mit dem Unterschied, dass das Zeitintervall nicht verändert werden kann.

$$\frac{x[nT] - x[nT - T]}{T} \quad \text{Differenzenquotient für diskrete Systeme}$$

Differenzengleichung:

Beispiel RC-Netzwerk (TP):

$$\frac{u_2[nT] - u_2[nT - T]}{T} \cdot RC \cdot u_2[nT] = u_1[nT]$$

Umformung nach $u_2[nT]$:

$$\frac{u_2[nT] \cdot RC - u_2[nT-T] \cdot RC}{T} + u_2[nT] = u_1[nT]$$

$$u_2[nT] \cdot \left(\frac{RC}{T} + 1 \right) - u_2[nT-T] \cdot \frac{RC}{T} = u_1[nT]$$

$$\frac{u_2[nT] \cdot RC}{T} + \frac{u_2[nT] \cdot T}{T} = u_1[nT] + u_2[nT-T] \cdot \frac{RC}{T}$$

$$\frac{u_2[nT] \cdot (RC + T)}{T} = u_1[nT] + u_2[nT-T] \cdot \frac{RC}{T}$$

$$u_2[nT] = u_1[nT] \cdot \frac{T}{RC + T} + u_2[nT-T] \cdot \frac{RC}{RC + T}$$

Allgemeine Schreibweise der Differenzgleichung

$$x[nT] \rightarrow x[n]$$

$$y[n] = b \cdot x[n] + a \cdot y[n-1]$$

→ b-Koeffizienten für $x[n], x[n-1], x[n-2], \dots$

→ a-Koeffizienten für $y[n], y[n-1], y[n-2], \dots$

- Maximale Vorkommende Verzögerung = Ordnung des Systems (Bsp. $y[n-2] \rightarrow 2.$ Ordnung)
- Kausale Systeme $\rightarrow N \leq M$ (\rightarrow Summenformel der Differenzgleichung)

Hinweise zum Blockschaltbild:

- Dreieck für Multiplikation von konstanten Faktoren
- Verzögerung mit Koeffizient in Blockform

Einteilung in rekursive und nicht-rekursive Systeme:

- System ist rekursiv, wenn das Ausgangssignal wieder auf den Eingang zurückgeführt wird \rightarrow Rückkopplung von Ausgang auf den Eingang
- Rekursive Systeme können instabil werden \rightarrow unendlich lange Impulsantwort
- IIR = infinite impulse response
- FIR = finite impulse response (\rightarrow nicht-rekursive Systeme)
- Kein Feedbackpfad bei nicht-rekursiven Systemen (Ausgang wieder auf den Eingang)
- Eigenschaften der Systeme können aus Differenzgleichung oder Blockschaltbild abgelesen werden