

Beispiel zur bilinearen z-Transformation

$$\omega_a = \frac{2}{T} \cdot \tan\left(\frac{\omega_d}{2}\right) \rightarrow f_a = \frac{2}{2\pi T} \cdot \tan\left(\frac{2\pi f_d T}{2}\right)$$

$$\rightarrow f_g = 2,6 \text{ kHz}, f_A = 8 \text{ kHz}$$

$$\Rightarrow f_a = \frac{f_A}{\pi} \cdot \tan\left(\frac{\pi f_d}{f_A}\right) = \frac{8 \text{ kHz}}{\pi} \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot 2,6 \text{ kHz}}{8 \text{ kHz}}\right) = 45,38 \text{ Hz}$$

Zusammenfassung IIR Filter:

Analoges System (zum Vergleich): $H_a(s) = \frac{1}{1+s}$

Impulsinvariante Simulation: $H_i(z) = \frac{T}{1-e^{-T}z^{-1}} \rightarrow b_0 = T, a_1 = -e^{-T}$

Schrittinvariante Simulation: $H_s(z) = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} = \frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}}$
 $\rightarrow b_0 = 0, b_1 = (1-e^{-T}), a_1 = -e^{-T}$

Bilineare z-Transformation: $H_b(z) = \frac{1+z^{-1}}{\left(1+\frac{2}{T}\right) + \left(1-\frac{2}{T}\right)z^{-1}}$
 $\rightarrow b_0 = 1, b_1 = 1, a_0 = \left(1+\frac{2}{T}\right), a_1 = \left(1-\frac{2}{T}\right)$

FIR-Filter

- Sind ein Sonderfall der diskreten LTI-Systeme \rightarrow besitzen keinen Feedback-Pfad
- Pole im Ursprung \rightarrow keine Frequenzgangbeeinflussung \rightarrow gelten oft als polstellenfrei
- Können linearphasig ausgelegt werden
- Sind immer stabil
- Brauchen mehr Koeffizienten als IIR-Filter mit gleicher Steilheit
- Sind weniger anfällig für Rundungsfehler
- Haben endliche Impulsantworten

Lineare Phase:

Lineare Impulsantwort \rightarrow konstante Gruppenlaufzeit \rightarrow linearer Phasengang

4 Grundarten für linearphasige FIR-Filter (Länge der Impulsantwort $\rightarrow N+1$):

1. Reelle und gerade Impulsantwort \rightarrow reeller (gerader) Frequenzgang $\rightarrow N$ gerade
2. Reelle und ungerade Impulsantwort \rightarrow reeller (gerader) Frequenzgang $\rightarrow N$ ungerade
3. Imaginäre und gerade Impulsantwort \rightarrow imaginärer (ungerader) Frequenzgang $\rightarrow N$ gerade
4. Imaginäre und ungerade Impulsantwort \rightarrow imaginärer (ungerader) Frequenzgang $\rightarrow N$ ungerade

Beispiel FIR-Filter:

$$h[n] = [1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0, 0]$$

$$= \delta[n] + 2 \cdot \delta[n-1] + 3 \cdot \delta[n-2] + \dots$$

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \dots + b_6 z^{-6} \quad (\rightarrow 6. \text{ Ordnung, } N = 6) = \sum_{k=0}^6 b_k z^{-k}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^6 b_k e^{-kj\Omega} = b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + b_2 e^{-2j\Omega} + \dots$$

Beispiel und Herleitung für Typ 1:

$$H(z) = b_{-3} z^3 + b_{-2} z^2 + b_{-1} z^1 + b_0 z^0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \quad (\rightarrow \text{System ist akausal!})$$

$$h[n] = b_{-3} \cdot \delta[n+3] + b_{-2} \cdot \delta[n+2] + b_{-1} \cdot \delta[n+1] + \dots$$

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} b_k e^{-kj\Omega} = b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k (e^{kj\Omega} + e^{-kj\Omega})$$

$$= b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k (\cos(k\Omega) + j \sin(k\Omega) + \cos(k\Omega) - j \sin(k\Omega))$$

$$= b_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k \cos(k\Omega)$$

→ Typ 1 → symmetrische Impulsantwort, N gerade → Frequenzgang reell

$$\rightarrow H_s(e^{j\Omega}) = e^{-j\frac{N}{2}\Omega} \cdot b_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k \cos(k\Omega) \quad (\rightarrow \text{Verschiebungssatz})$$

$$|H(e^{j\Omega})| = b_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k \cos(k\Omega) \rightarrow \text{unverändert, weil } \left| e^{-j\frac{N}{2}\Omega} \right| = 1$$

$$\text{Typ 2} \rightarrow H_{II}(e^{j\Omega}) = e^{-j\frac{N}{2}\Omega} \cdot \left[2 \cdot \sum_{k=1}^{\frac{N+1}{2}} b_k \cos((k-0,5)\Omega) \right]$$

$$\text{Typ 3} \rightarrow H_{III}(e^{j\Omega}) = e^{-j\frac{N}{2}\Omega} \cdot \left[2j \cdot \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k \sin(k\Omega) \right]$$

$$\text{Typ 4} \rightarrow H_{II}(e^{j\Omega}) = e^{-j\frac{N}{2}\Omega} \cdot \left[2j \cdot \sum_{k=1}^{\frac{N+1}{2}} b_k \sin((k-0,5)\Omega) \right]$$

$$\Omega = \omega T \rightarrow \frac{f_A}{2} \text{ einsetzen} \rightarrow 2\pi \cdot \frac{f_A}{2} \cdot \frac{1}{f_A} = \pi$$

Warum kann Typ drei kein HP sein:

$$|H(e^{j\Omega})| \rightarrow \frac{f_A}{2} \text{ einsetzen} \rightarrow 2j \cdot 0 = 0$$

➔ HP müsste bei Nyquistfrequenz 1 sein

Fenstermethode:

Verfahren: unendliche bzw. kontinuierliche Impulsantwort abtasten und auswerten

Ablauf:

- T festlegen und gewünschte Impulsantwort $h(t)$ abtasten, dies ergibt $h[n]$, $n = -\infty \dots \infty$
- Relevanten Anteil von $h(t)$ rausschneiden, Anzahl der bleibenden Abtastwerte ergibt N .
Koeffizienten des Filters: $b[n] = T \cdot h[n]$
- Koeffizienten durch Fenster gewichten (Vermeiden von Gibbschem Phänomen)

Wenn der Frequenzgang vorliegt, muss zunächst in den Zeitbereich transformiert werden.

Beispiel: inverse FT eines idealen TP

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_g}^{\omega_g} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi jt} \cdot e^{j\omega t} \Big|_{-\omega_g}^{\omega_g} = \frac{1}{2\pi jt} \cdot (e^{j\omega_g t} - e^{-j\omega_g t}) \\ &= \frac{1}{2\pi jt} \cdot (\cos(\omega_g t) + j \sin(\omega_g t) - \cos(\omega_g t) + j \sin(\omega_g t)) \\ &= \frac{\sin(\omega_g t)}{\pi t} = \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \text{si}(\omega_g t) \end{aligned}$$

$$\text{Abtasten} \rightarrow h[n] = \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \text{si}[\omega_g nT]$$

- ➔ Höhere Übergangsbreite, wenn man größere Nebenkeulendämpfung erreichen möchte
- ➔ Umso höher die Ordnung, umso geringer die Übergangsbreite

Frequenzabtastung:

- Frequenzgang wird abgetastet → IDFT → Impulsantwort
- Anzahl der Abtastwerte entscheidet über Genauigkeit
- Zwischen Abtastwerten wird bei der DFT interpoliert → es entstehen
Transitionskoeffizienten
- ➔ Ergebnis wird wegen linearer Interpolation nicht unbedingt besser

Approximation im z-Bereich:

- Genau wie bei IIR Filtern, mit der Ausnahme, dass die Systeme nicht instabil werden können

Frequenz-Transformation:

- Verschiebung von TP
- Subtraktion von HP und TP \rightarrow BP
- Differenzfilter (Komplementärfilter) \rightarrow z.B. TP \rightarrow HP ($H_{HP}(e^{j\Omega}) = 1 - H_{TP}(e^{j\Omega})$)
- BS: $H_{BS}(e^{j\Omega}) = 1 - H_{BP}(e^{j\Omega})$ (Komplementärfilter zur Bandsperre) \rightarrow Nur Typ 1