Faltung

$$x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)\,d\tau$$

Ablauf:

1. Zeitvariable t durch τ ersetzen
2. $x_2(\tau)$ an der y-Achse spiegeln/falten, dies ergibt $x_2(-\tau)$.

   $x_2(-\tau)$ um $t=-\infty$ nach rechts verschieben (optisch nach links verschoben) → $x_2(t-\tau)$
3. Faltungsintegral berechnen

Hinweise:

- Faltung ist sehr rechenintensiv und schwierig (auch für Computer)
- Überlagerung der Signale (Durchschieben von $x_2(\tau)$) → Flächeninhalt der überlagerten Fläche entspricht dem Funktionswert der Faltung
- Faltung im Zeitbereich ○—● Multiplikation im Frequenzbereich

  $x_1(t)*x_2(t) \quad ○—● \quad Y(j\omega)=X_1(j\omega)\cdot X_2(j\omega)$

Die Dirac Distribution und ihre Eigenschaften

Definitionen:

$$\delta(t)=\begin{cases}0, \ \mathit{für}\ t\neq 0\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)=1\\ ?, \ \mathit{für}\ t=0\end{cases}$$

Eigenschaften von $\delta(t)$:

1. Ausblendeigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t-t_0)\,dt=x(t_0)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=x(t_0)$$

$$x(t)\cdot\delta(t-t_0)=x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)=x(t_0)$$

2. Spektrum

$$\delta(t) ○—● \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\cdot e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\cdot e^{-j\omega 0}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1$$

$$\delta(t) ○—● 1$$

3. Faltung

$$x(t)*\delta(t)=x(t)$$

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

4. Darstellungsmöglichkeiten
   $$\delta(t-t_0)=\delta(t_0-t)$$

Beispiele:

$$(t-1)^2\cdot\delta(t-1)=0$$
$$e^{-t}\cdot\delta(t)=1$$

<u>Eigenschaften der Fourier Transformation</u>

1. Linearität
   $$k_1\cdot x_1(t)+k_2\cdot x_2(t)\circ\!-\!\bullet\; k_1\cdot X_1(j\omega)+k_2\cdot X_2(j\omega)$$

2. Dualität
   $$x(t)\circ\!-\!\bullet\; X(j\omega)\Leftrightarrow 2\pi\cdot x(-j\omega)\circ\!-\!\bullet\; X(t)$$

3. Zeitskalierung
   $$x(at)\circ\!-\!\bullet\;\frac{1}{|a|}\cdot X\left(j\cdot\frac{\omega}{a}\right)$$

4. Frequenzskalierung
   $$\frac{1}{|b|}\cdot x\left(\frac{t}{b}\right)\circ\!-\!\bullet\; X(bj\omega)$$

Hinweise:
- Signale mit kurzer Signaldauer haben ein breites Spektrum
- Signale mit langer Signaldauer haben ein schmales Spektrum
- Schnell ändernde Signale haben ein breites Spektrum
  ➔ Zeit-Bandbreite-Produkt / Unschärferelation der Signalverarbeitung

5. Zeitverschiebungssatz
   $$x(t-\tau)\circ\!-\!\bullet\; X(j\omega)\cdot e^{-j\omega\tau}$$

6. Frequenzverschiebungssatz
   $$x(t)\circ\!-\!\bullet\; X(j(\omega-W))$$

7. Differentiation im Zeitbereich
   $$\frac{d}{dt}x(t)\circ\!-\!\bullet\; j\omega\cdot X(j\omega)$$

8. Integration im Zeitbereich

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = x(t) * \varepsilon(t) \circ\!-\!\bullet\ \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi \cdot X(j\omega) \cdot \delta(\omega)$$

<u>Laplace Transformation</u>

- Verallgemeinerung der Fourier Transformation
  $s = \sigma + j\omega$ (Frequenzvariable wird komplex)

$$x(t) \circ\!-\!\bullet\ X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t) \cdot e^{-\sigma t} \right] \cdot e^{-j\omega t} dt$$

➔ Die Laplace Transformierte von $x(t)$ entspricht der Fourier Transformierten von $x(t) \cdot e^{-\sigma t}$.

Herleitung:

$$x_*(t) = x(t) \cdot e^{-\sigma t} \circ\!-\!\bullet \int_{-\infty}^{\infty} \left(x(t) \cdot e^{-\sigma t} \right) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-\sigma t - j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$$

Hinweise:

- Die Auswertung der imaginären Achse der Laplace Transformierten entspricht der Fourier Transformierten
- Für kausale Systeme braucht nur die einseitige Laplace Transformation berechnet zu werden, sie stimmt mit der zweiseitigen überein

  $$\int_{0^-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$$

- Bei stabilen Systemen kann man durch die Substitution $s \leftrightarrow j\omega$ zwischen FT und zweiseitiger LT wechseln. Für kausale und stabile Systeme gilt dieses entsprechend mit der einseitigen LT.

Eigenschaften:

1. Linearität
2. Verschiebung im Zeitbereich
3. Verschiebung im Frequenzbereich
4. Ähnlichkeitssatz

   $$x(at) \circ\!-\!\bullet\ \frac{1}{a} \cdot X\left(\frac{s}{a}\right)$$

5. Differentiation im Zeitbereich

   $$\frac{dx(t)}{dt} \circ\!-\!\bullet\ s \cdot X(s) - x(0^-)$$

6. Integration im Zeitbereich

$$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\,d\tau \circ\!-\!\bullet \frac{1}{s}\cdot X(s)$$

Beispiel:

$$\varepsilon(t)=\int \delta(t)\,dt \circ\!-\!\bullet \frac{1}{s}\cdot X_\delta(s)=\frac{1}{s}\cdot 1=\frac{1}{s}$$

<u>LTI-Systeme</u>

- Die Impulsantwort enthält alle relevanten Informationen über das Übertragungsverhalten des Systems
- Ein LTI-System, welchem ein harmonisches Signal der Frequenz ω_0 zugeführt wird, kann nur mit einem harmonischen Signal derselben Frequenz reagieren
  ➔ Ein LTI-System erzeugt keine neuen Frequenzen

Ermittlung der Impulsantwort:

$$y(t)=x(t)*h(t)\circ\!-\!\bullet\ Y(j\omega)=X(j\omega)\cdot H(j\omega)$$

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\rightarrow \left|H(j\omega)\right|(Amplitudengang),\ \arg\left\{H(j\omega)\right\}(Phasengang)$$

Beispiel: RC-Netzwerk

$$\underline{X}_R=R$$

$$\underline{X}_C=\frac{1}{j\omega C}=\frac{1}{j\omega}\cdot\frac{1}{C}$$

$$U_C=\frac{1}{C}\cdot\int i_C(t)\,dt\ ,\ U_L=L\cdot\frac{di_C(t)}{dt}\Rightarrow \underline{X}_L=j\omega L$$

$$U_1(t)=x(t),\ U_2(t)=y(t)$$

$$y(t)=\frac{\underline{X}_C}{\underline{X}_C+\underline{X}_R}\cdot x(t)\circ\!-\!\bullet\ Y(j\omega)=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}\cdot X(j\omega)$$

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+j\omega RC}\quad (Frequenzgang)$$

$$\left|H(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

Bestimmung der Grenzfrequenz ω_g

$$\left|H\left(j\omega_g\right)\right| = -3dB \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\omega_g RC\right)}}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+\left(\omega_g RC\right)^2}$$

$$2 = 1+\left(\omega_g RC\right)^2$$

$$1 = \left(\omega_g RC\right)$$

$$\omega_g = \frac{1}{RC} \Leftrightarrow f_g = \frac{1}{2\pi RC}$$