

## Faltung

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau$$

Ablauf:

1. Zeitvariable  $t$  durch  $\tau$  ersetzen
2.  $x_2(\tau)$  an der  $y$ -Achse spiegeln/falten, dies ergibt  $x_2(-\tau)$ .  
 $x_2(-\tau)$  um  $t = -\infty$  nach rechts verschieben (optisch nach links verschoben)  $\rightarrow x_2(t - \tau)$
3. Faltungsintegral berechnen

Hinweise:

- Faltung ist sehr rechenintensiv und schwierig (auch für Computer)
- Überlagerung der Signale (Durchschieben von  $x_2(\tau)$ )  $\rightarrow$  Flächeninhalt der überlagerten Fläche entspricht dem Funktionswert der Faltung
- Faltung im Zeitbereich  $\circ - \bullet$  Multiplikation im Frequenzbereich  
 $x_1(t) * x_2(t) \circ - \bullet Y(j\omega) = X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega)$

## Die Dirac Distribution und ihre Eigenschaften

Definitionen:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \\ ?, & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

Eigenschaften von  $\delta(t)$ :

1. Ausblendeigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$
$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0)$$

2. Spektrum

$$\delta(t) \circ - \bullet \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega 0} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$
$$\delta(t) \circ - \bullet 1$$

3. Faltung

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$
$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

#### 4. Darstellungsmöglichkeiten

$$\delta(t-t_0) = \delta(t_0-t)$$

Beispiele:

$$(t-1)^2 \cdot \delta(t-1) = 0$$

$$e^{-t} \cdot \delta(t) = 1$$

#### Eigenschaften der Fourier Transformation

##### 1. Linearität

$$k_1 \cdot x_1(t) + k_2 \cdot x_2(t) \circ - \bullet k_1 \cdot X_1(j\omega) + k_2 \cdot X_2(j\omega)$$

##### 2. Dualität

$$x(t) \circ - \bullet X(j\omega) \Leftrightarrow 2\pi \cdot x(-j\omega) \circ - \bullet X(t)$$

##### 3. Zeitskalierung

$$x(at) \circ - \bullet \frac{1}{|a|} \cdot X\left(j \cdot \frac{\omega}{a}\right)$$

##### 4. Frequenzskalierung

$$\frac{1}{|b|} \cdot x\left(\frac{t}{b}\right) \circ - \bullet X(bj\omega)$$

Hinweise:

- Signale mit kurzer Signaldauer haben ein breites Spektrum
- Signale mit langer Signaldauer haben ein schmales Spektrum
- Schnell ändernde Signale haben ein breites Spektrum
- ➔ Zeit-Bandbreite-Produkt / Unschärferelation der Signalverarbeitung

##### 5. Zeitverschiebungssatz

$$x(t-\tau) \circ - \bullet X(j\omega) \cdot e^{-j\omega\tau}$$

##### 6. Frequenzverschiebungssatz

$$x(t) \circ - \bullet X(j(\omega-W))$$

##### 7. Differentiation im Zeitbereich

$$\frac{d}{dt}x(t) \circ - \bullet j\omega \cdot X(j\omega)$$

## 8. Integration im Zeitbereich

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * \varepsilon(t) \circ - \bullet \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi \cdot X(j\omega) \cdot \delta(\omega)$$

### Laplace Transformation

- Verallgemeinerung der Fourier Transformation  
 $s = \sigma + j\omega$  (Frequenzvariable wird komplex)

$$x(t) \circ - \bullet X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) \cdot e^{-\sigma t}] \cdot e^{-j\omega t} dt$$

- Die Laplace Transformierte von  $x(t)$  entspricht der Fourier Transformierten von  $x(t) \cdot e^{-\sigma t}$ .

Herleitung:

$$\begin{aligned} x_*(t) = x(t) \cdot e^{-\sigma t} \circ - \bullet \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) \cdot e^{-\sigma t}) \cdot e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-\sigma t - j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt \end{aligned}$$

Hinweise:

- Die Auswertung der imaginären Achse der Laplace Transformierten entspricht der Fourier Transformierten
- Für kausale Systeme braucht nur die einseitige Laplace Transformation berechnet zu werden, sie stimmt mit der zweiseitigen überein

$$\int_{0^-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$$

- Bei stabilen Systemen kann man durch die Substitution  $s \leftrightarrow j\omega$  zwischen FT und zweiseitiger LT wechseln. Für kausale und stabile Systeme gilt dieses entsprechend mit der einseitigen LT.

Eigenschaften:

1. Linearität
2. Verschiebung im Zeitbereich
3. Verschiebung im Frequenzbereich
4. Ähnlichkeitssatz

$$x(at) \circ - \bullet \frac{1}{a} \cdot X\left(\frac{s}{a}\right)$$

5. Differentiation im Zeitbereich

$$\frac{dx(t)}{dt} \circ - \bullet s \cdot X(s) - x(0^-)$$

## 6. Integration im Zeitbereich

$$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \circ - \bullet \frac{1}{s} \cdot X(s)$$

Beispiel:

$$\varepsilon(t) = \int \delta(t) dt \circ - \bullet \frac{1}{s} \cdot X_\delta(s) = \frac{1}{s} \cdot 1 = \frac{1}{s}$$

### LTI-Systeme

- Die Impulsantwort enthält alle relevanten Informationen über das Übertragungsverhalten des Systems
- Ein LTI-System, welchem ein harmonisches Signal der Frequenz  $\omega_0$  zugeführt wird, kann nur mit einem harmonischen Signal derselben Frequenz reagieren  
 ➔ Ein LTI-System erzeugt keine neuen Frequenzen

Ermittlung der Impulsantwort:

$$y(t) = x(t) * h(t) \circ - \bullet Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \rightarrow |H(j\omega)| \text{ (Amplitudengang)}, \arg\{H(j\omega)\} \text{ (Phasengang)}$$

Beispiel: RC-Netzwerk

$$\underline{X}_R = R$$

$$\underline{X}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{C}$$

$$U_C = \frac{1}{C} \cdot \int i_C(t) dt, U_L = L \cdot \frac{di_C(t)}{dt} \Rightarrow \underline{X}_L = j\omega L$$

$$U_1(t) = x(t), U_2(t) = y(t)$$

$$y(t) = \frac{\underline{X}_C}{\underline{X}_C + \underline{X}_R} \cdot x(t) \circ - \bullet Y(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \text{ (Frequenzgang)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Bestimmung der Grenzfrequenz  $\omega_g$

$$|H(j\omega_g)| = -3dB \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_g RC)^2}}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+(\omega_g RC)^2}$$

$$2 = 1+(\omega_g RC)^2$$

$$1 = (\omega_g RC)^2$$

$$\omega_g = \frac{1}{RC} \Leftrightarrow f_g = \frac{1}{2\pi RC}$$