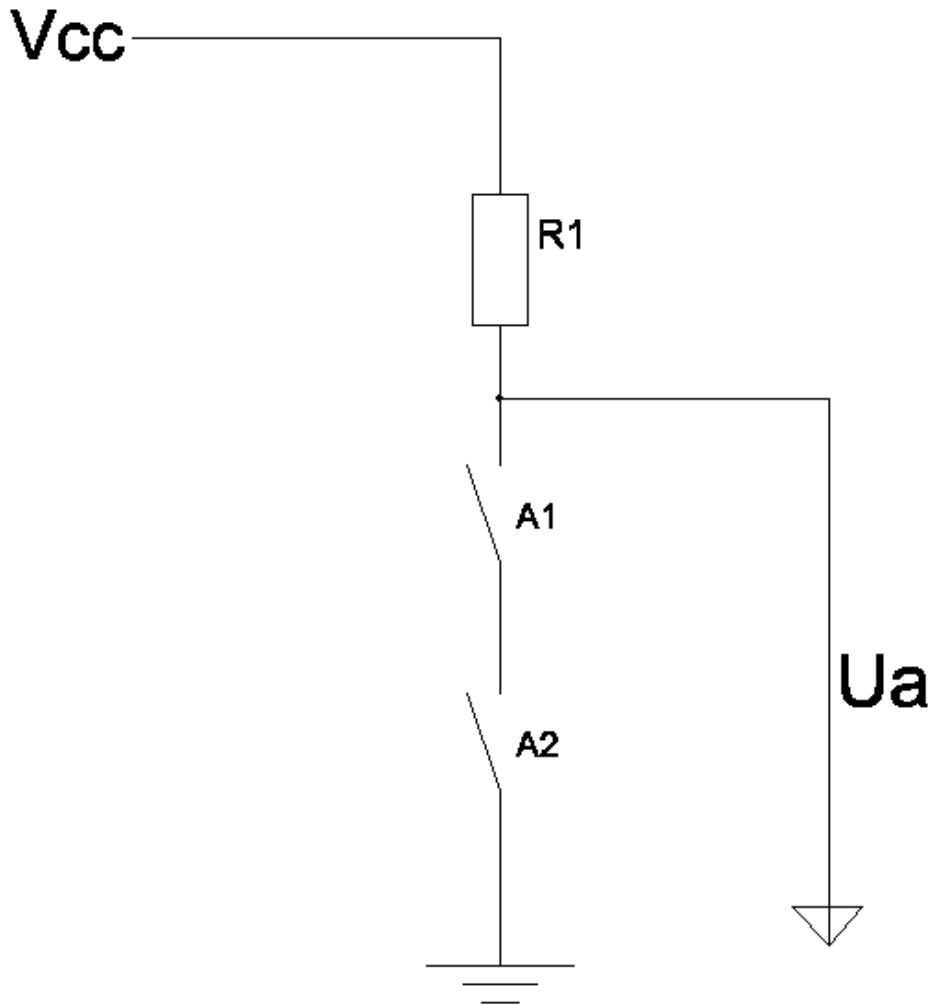


Satz von De Morgan

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

A	B	A + B	$\overline{A+B}$	\overline{A}	\overline{B}	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

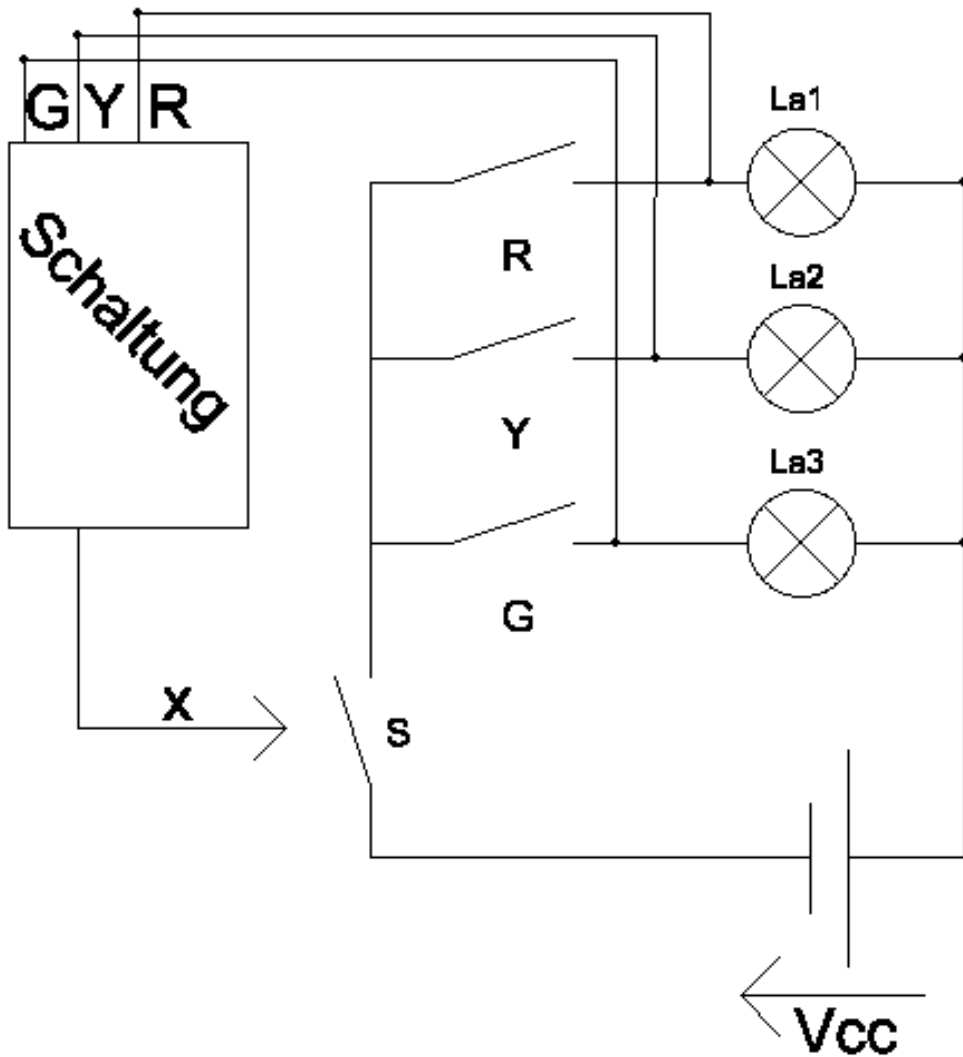
Transistoren:



A	B	U_a	$\overline{A \cdot B}$
0	0	V_{CC}	1
0	1	V_{CC}	1
1	0	V_{CC}	1
1	1	0 V	0

Beispiel: Schaltung zur Erkennung gültiger Ampelsignale

$$F(R, Y, G) = X$$



Funktionstabelle:

R	Y	G	X
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

X = 0 → Ampel läuft nicht ordnungsgemäß

X = 1 → Ampel ist in Ordnung

Wie kommt man von der Wahrheitstabelle zur Schaltfunktion (= Boolesche Funktion) und damit zur technischen Realisierung durch Gatter?

Lösung: Normierte Ausdrücke zur Darstellung von Schaltfunktionen (= Booleschen Funktionen)

Begriffs -Definition:

Produktterm: UND - Verknüpfung (Konjunktion) einfacher boolescher Variablen (evtl. negiert)

Bsp.: $R \cdot \bar{G}$, $R \cdot Y \cdot G$, $\bar{R} \cdot Y \cdot \bar{G}$ (! Einfache Variablen !)

Minterm: Produktterm, indem jede Variable der Schaltfunktion (= booleschen F.) genau einmal vorkommt (negiert oder nicht negiert)

Bsp.: $R \cdot Y \cdot G$, $\bar{R} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{G}$ (alle Variablen kommen vor)

Disjunktive Normalform: ODER - Verknüpfung (lat. Disjunktion) von Produkttermen

Bsp.: $(R \cdot \bar{G}) + (R \cdot Y \cdot G) + (\bar{R} \cdot Y)$

Kanonische Disjunktive Normalform (KDNF):
ODER-Verknüpfung (Disjunktion) von Mintermen

Bsp.: $(R \cdot Y \cdot G) + (\bar{R} \cdot \bar{Y} \cdot G) + (R \cdot \bar{Y} \cdot \bar{G})$

Hauptsatz der Schaltalgebra:

Jede Schaltfunktion (= Boolesche Funktion) lässt sich als genau eine KDNF darstellen!

Vorgehensweise bei der Erstellung der KDNF aus der Funktionstabelle:

- Es werden nur jene Tabellenzeilen betrachtet, die eine 1 ergeben
- Man formuliert für jede Zeile Minterme (1 Term pro Zeile)
- Die Belegung der Eingangsvariablen in der Tabellenzeile führt zum Minterm:

1: Variable in Minterm übernehmen

0: Variable negiert in Minterm übernehmen

R	Y	G	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

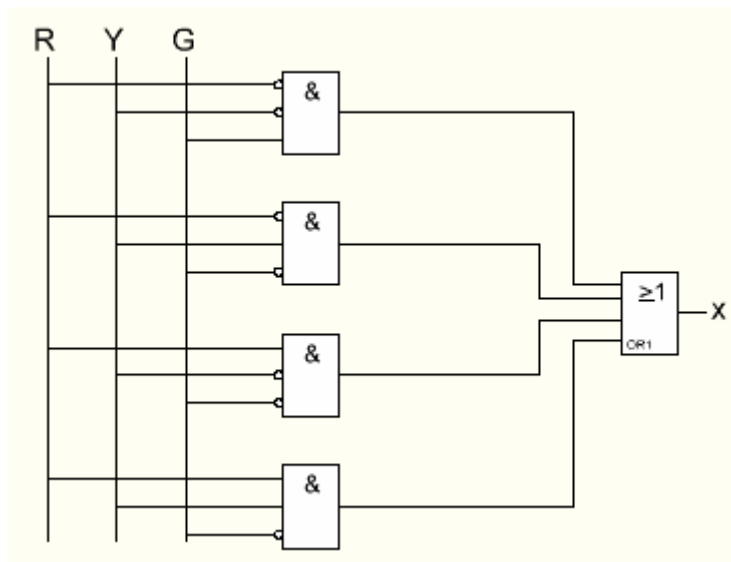
$$\rightarrow (\bar{R} \cdot \bar{Y} \cdot G)$$

$$\rightarrow (\bar{R} \cdot Y \cdot \bar{G})$$

$$\rightarrow (R \cdot \bar{Y} \cdot \bar{G})$$

$$\rightarrow (R \cdot Y \cdot \bar{G})$$

$$\text{KDNF: } (\bar{R} \cdot \bar{Y} \cdot G) + (\bar{R} \cdot Y \cdot \bar{G}) + (R \cdot \bar{Y} \cdot \bar{G}) + (R \cdot Y \cdot \bar{G})$$



Problem: KDNF liefert aufwändige Lösungen

Ziel: Möglichst einfache Lösung

- Anzahl der Eingänge je Gatter minimal
- Anzahl der Gatter minimal
- Weniger Bauteile, geringere Kosten, höhere Zuverlässigkeit

Lösung: Minimierung der Schaltfunktion

1. Möglichkeit: Algebraische Minimierung

→ Vereinfachung durch schrittweises Anwenden der Rechenregeln der Booleschen Algebra
(Besonders: Distributivgesetz, Komplementäres Element, neutrales Element)

Bsp.:

$$\text{KDNF: } (\bar{R} \cdot \bar{Y} \cdot G) + (\bar{R} \cdot Y \cdot \bar{G}) + (R \cdot \bar{Y} \cdot \bar{G}) + (R \cdot Y \cdot \bar{G})$$

1) Man sucht Terme, die genau einen Unterschied haben, in diesem Fall z.B. der dritte und der Vierte.

$$\begin{aligned} & (\bar{R} \cdot \bar{Y} \cdot G) + (\bar{R} \cdot Y \cdot \bar{G}) + (R \cdot \bar{G} (Y + \bar{Y})) \\ & (R \cdot \bar{G} (Y + \bar{Y})) = (R \cdot \bar{G}) \end{aligned}$$

- Zunächst klammert man die beiden gemeinsamen Variablen aus, hier $(R \cdot \bar{G})$.
- In der Klammer steht dann die andere Variable und ihre Negation. Daraus kann entweder eine 0 (VerUNDdung) oder eine 1 (VerODERung) folgen. Die Klammer fällt also in jedem Fall weg.

$$\begin{aligned} & (\bar{R} \cdot \bar{Y} \cdot G) + (\bar{R} \cdot Y \cdot \bar{G}) + (R \cdot \bar{Y} \cdot \bar{G}) + (R \cdot Y \cdot \bar{G}) \\ & = (\bar{R} \cdot \bar{Y} \cdot G) + (\bar{R} \cdot Y \cdot \bar{G}) + (R \cdot \bar{G}) \end{aligned}$$

2) Man sucht Terme, die sich in einer Variablen und im Fehlen einer anderen Variable unterscheiden.

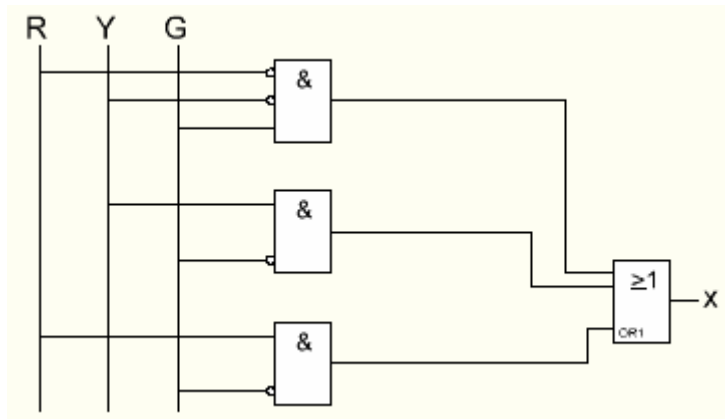
Bsp.:

$$\begin{aligned} & (\bar{R} \cdot \bar{Y} \cdot G) + (\bar{G} \cdot ((\bar{R} \cdot Y) + R)) \\ & = (\bar{R} \cdot \bar{Y} \cdot G) + (\bar{G} \cdot R) + (\bar{G} \cdot Y) \end{aligned}$$

- Man klammert die in beiden Termen vorhandene Variable aus, hier \bar{G} .
- In der Klammer steht nun ein Ausdruck, der über das Distributivgesetz ausmultipliziert und auch ausaddiert (Distributiv-Gesetz Sonderregel!!!) werden kann.
- Nun erhält man zwei Klammerausdrücke, in einem steht wieder ein komplementäres Element, welches entweder eine 0 (VerUNDdung) oder eine 1 (VerODERung) ergibt.
- Zum Schluss kann man den erhaltenen Term ausmultiplizieren oder ausaddieren und so weiter vereinfachen.

$$\begin{aligned}
 & (\bar{R} \cdot \bar{Y} \cdot G) + (\bar{R} \cdot Y \cdot \bar{G}) + (R \cdot \bar{Y} \cdot \bar{G}) + (R \cdot Y \cdot \bar{G}) \\
 & = (\bar{R} \cdot \bar{Y} \cdot G) + (\bar{G} \cdot R) + (\bar{G} \cdot Y)
 \end{aligned}$$

Als neue Schaltung würde sich folgende ergeben:



3) 2 Terme unterscheiden sich durch das Fehlen mehrerer Variablen und sind in einer Variable verschieden.

$$\begin{aligned}
 & Y + (R \cdot \bar{Y} \cdot \bar{G}) \\
 & = Y + (R \cdot \bar{G})
 \end{aligned}$$

- Man substituiert für die jene Variablen, die in einem Term fehlen, eine Hilfsvariable:

$$k = R \cdot \bar{G}$$

- Nun wendet man das Distributivgesetz an

$$Y + (\bar{Y} \cdot k) = (Y + \bar{Y}) \cdot (Y + k)$$

- In der einen Klammer steht wieder ein komplementäres Element, welches entweder eine 0 (VerUNDdung) oder eine 1 (VerODERung) ergibt.

$$\begin{aligned}
 & (Y + \bar{Y}) \cdot (Y + k) = 1 \cdot (Y + k) = Y + k \\
 & = Y + (R \cdot \bar{G})
 \end{aligned}$$

Fehlersuche:

- Abschreibfehler
- Distributivgesetz für die Addition
- Negationsstriche vergessen
- falsch umgeformt

2. Möglichkeit: KV Diagramm

- Karnaugh – Veitch Diagramme

- KV Diagramme bieten einen graphischen Weg zu Minimierung von Schaltfunktionen

- Stellt die Funktionstabelle graphisch dar

- Rechteckschema → jedes Feld entspricht einer Zeile in der Wahrheits- (Funktions) Tabelle

Beispiel: Schaltfunktion mit 2 Eingängen → $2^2 = 4$ Tabellen zeilen
= 4 Felder im KV Diagramm

A	B	y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

A	0	1
B		
0	1	1
1	0	0

In das KV Diagramm wird der Tabelleninhalt übertragen

Bei einer Schaltung mit 3 Eingängen hat die Funktionstabelle
 $2^3 = 8$ Zeilen → 8 Felder im KV Diagramm

Das 8 Felder KV-Diagramm wird erzeugt, indem das 4-Felder Diagramm an der Senkrechten, rechten Kante gespiegelt wird.

		A			
		$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$	$A \cdot \overline{B} \cdot C$	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$
B		$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$	$A \cdot B \cdot \overline{C}$	$A \cdot B \cdot C$	$\overline{A} \cdot B \cdot C$
		C			

In der "neuen" Hälfte des KV - Diagrams gilt $C = 1$.