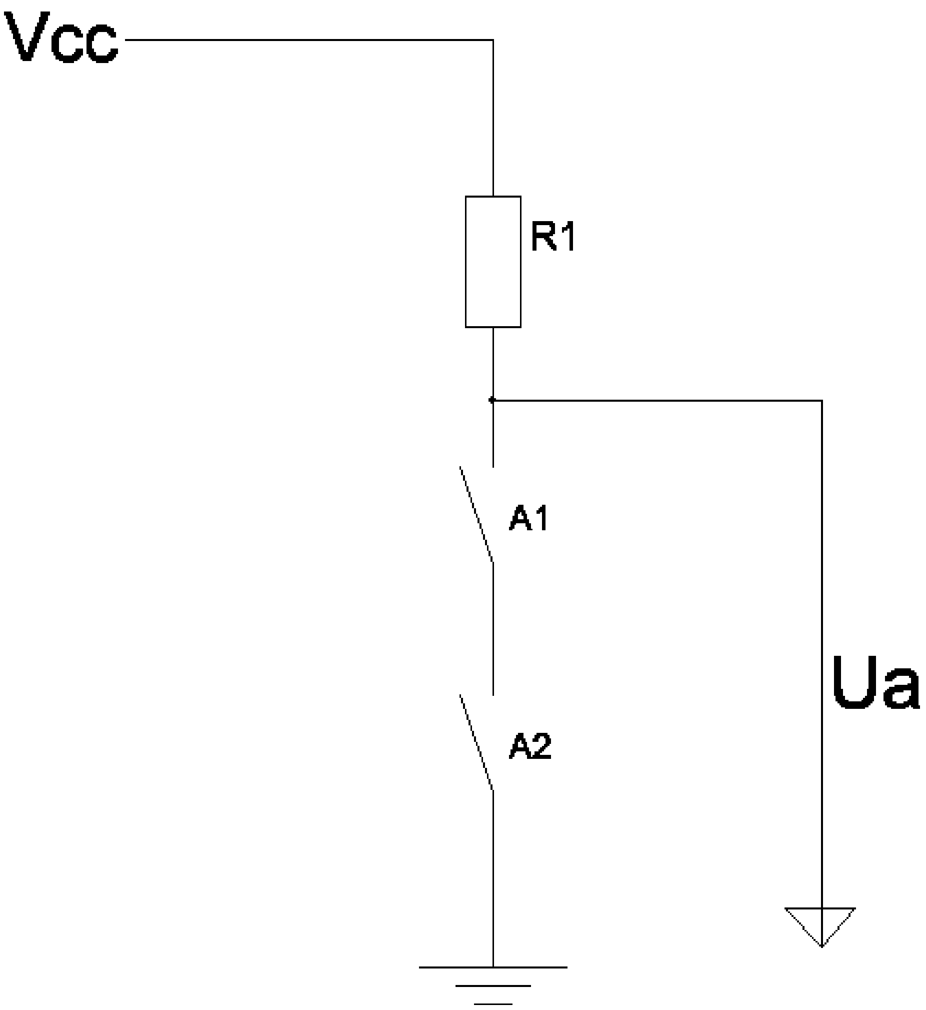
Satz von De Morgan

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

A	B	A + B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

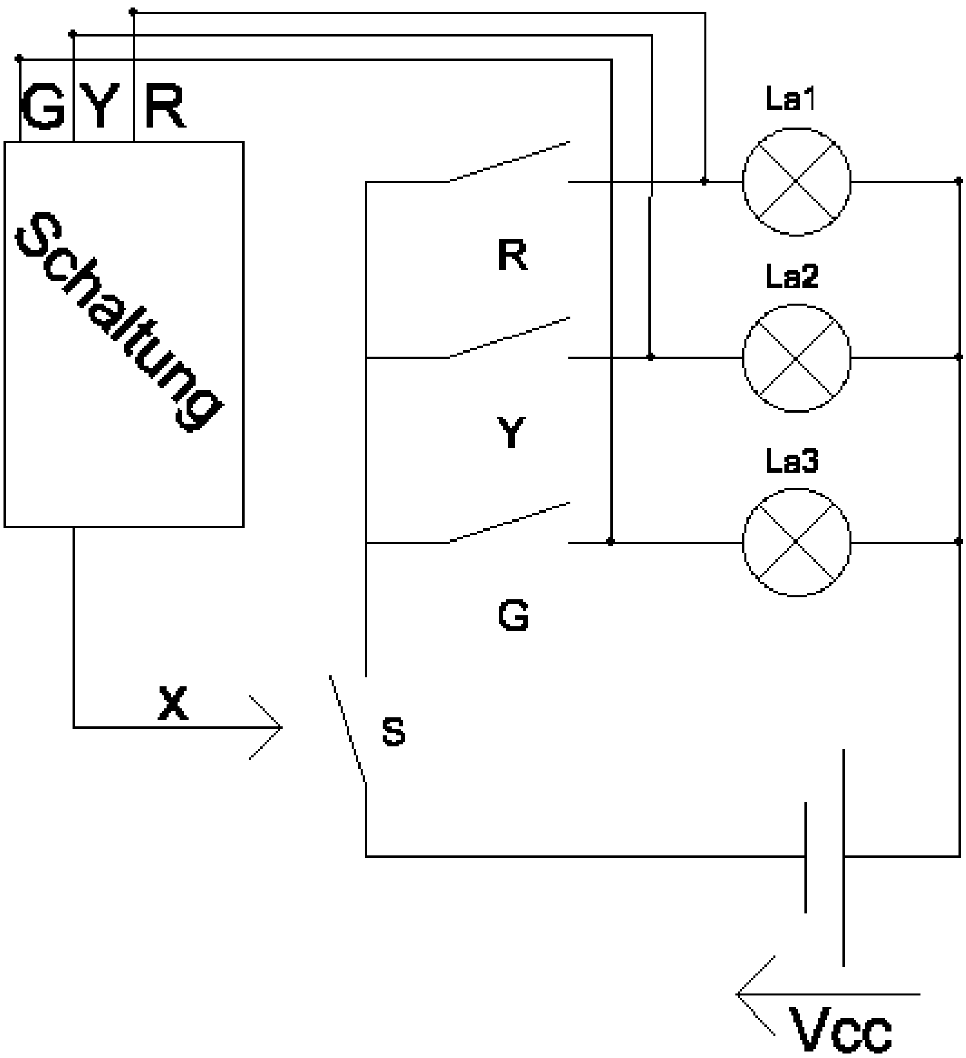
Transistoren:



A	B	U_a	$\overline{A \cdot B}$
0	0	Vcc	1
0	1	Vcc	1
1	0	Vcc	1
1	1	0 V	0

Beispiel: Schaltung zur Erkennung gültiger Ampelsignale

F (R, Y, G) = X



Funktionstabelle:

R	Y	G	X
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

X = 0 → Ampel läuft nicht ordnungsgemäß
X = 1 → Ampel ist in Ordnung

Wie kommt man von der Wahrheitstabelle zur Schaltfunktion (= Boolsche Funktion) und damit zur technischen Realisierung durch Gatter?

Lösung: Normierte Ausdrücke zur Darstellung von Schaltfunktionen (= Boolschen Funktionen)

Begriffs -Definition:

Produktterm: UND - Verknüpfung (Konjunktion) einfacher boolscher Variablen (evtl. negiert)

Bsp.: $R \cdot \overline{G},\ R \cdot Y \cdot G,\ \overline{R} \cdot Y \cdot \overline{G}$ (! Einfache Variablen !)

Minterm: Produktterm, indem jede Variable der Schaltfunktion (= booschen F.) genau einmal vorkommt (negiert oder nicht negiert)

Bsp.: $R \cdot Y \cdot G,\ \overline{R} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{G}$ (alle Variablen kommen vor)

Disjunktive Normalform: ODER - Verknüpfung (lat. Disjunktion) von Produkttermen

Bsp.: $\left(R \cdot \overline{G}\right) + \left(R \cdot Y \cdot G\right) + \left(\overline{R} \cdot Y\right)$

Kanonische Disjunktive Normalform (KDNF):
ODER-Verknüpfung (Disjunktion) von Mintermen

Bsp.: $\left(R \cdot Y \cdot G\right) + \left(\overline{R} \cdot \overline{Y} \cdot G\right) + \left(R \cdot \overline{Y} \cdot \overline{G}\right)$

Hauptsatz der Schaltalgebra:

Jede Schaltfunktion (= Boolsche Funktion) lässt sich als genau eine KDNF darstellen!

Vorgehensweise bei der Erstellung der KDNF aus der Funktionstabelle:

- Es werden nur jene Tabellenzeilen betrachtet, die eine 1 ergeben

- Man formuliert für jede Zeile Minterme (1 Term pro Zeile)

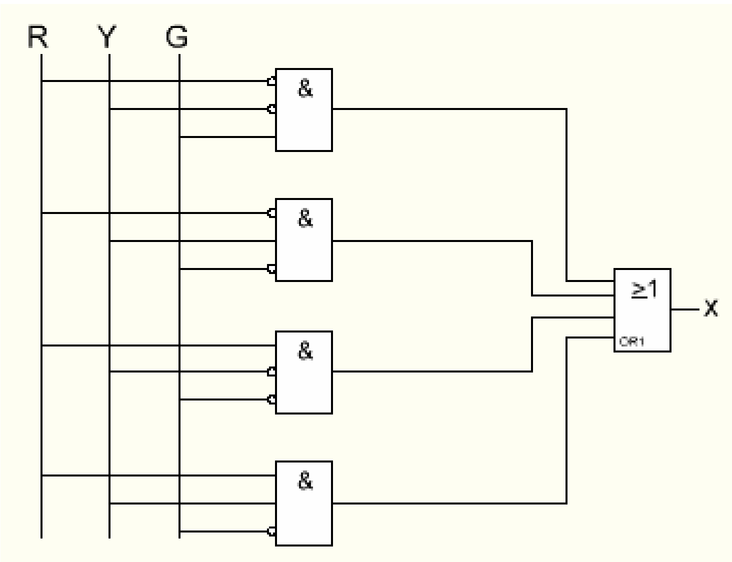
- Die Belegung der Eingangsvariablen in der Tabellenzeile führt zum Minterm:

1: Variable in Minterm übernehmen

0: Variable negiert in Minterm übernehmen

R	Y	G	X	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\rightarrow \left(\overline{R} \cdot \overline{Y} \cdot G\right)$
0	1	0	1	$\rightarrow \left(\overline{R} \cdot Y \cdot \overline{G}\right)$
1	0	0	1	$\rightarrow \left(R \cdot \overline{Y} \cdot \overline{G}\right)$
1	1	0	1	$\rightarrow \left(R \cdot Y \cdot \overline{G}\right)$
0	1	1	0	
1	0	1	0	
1	1	1	0	

KDNF: $\left(\overline{R} \cdot \overline{Y} \cdot G\right) + \left(\overline{R} \cdot Y \cdot \overline{G}\right) + \left(R \cdot \overline{Y} \cdot \overline{G}\right) + \left(R \cdot Y \cdot \overline{G}\right)$



Problem: KDNF liefert aufwändige Lösungen

Ziel: Möglichst einfache Lösung

- Anzahl der Eingänge je Gatter minimal
- Anzahl der Gatter minimal

→ Weniger Bauteile, geringere Kosten, höhere Zuverlässigkeit

Lösung: Minimierung der Schaltfunktion

1. Möglichkeit: Algebraische Minimierung

→ Vereinfachung durch schrittweises Anwenden der Rechenregeln der Boolschen Algebra
(Besonders: Distributivgesetz, Komplementäres Element, neutrales Element)

Bsp.:

KDNF: $\left(\overline{R}\cdot\overline{Y}\cdot G\right)+\left(\overline{R}\cdot Y\cdot\overline{G}\right)+\left(R\cdot\overline{Y}\cdot\overline{G}\right)+\left(R\cdot Y\cdot\overline{G}\right)$

1) Man sucht Terme, die genau einen Unterschied haben, in diesem Fall z.B. der dritte und der Vierte.

$$\left(\overline{R}\cdot\overline{Y}\cdot G\right)+\left(\overline{R}\cdot Y\cdot\overline{G}\right)+\left(R\cdot\overline{G}\left(Y+\overline{Y}\right)\right)$$

$$\left(R\cdot\overline{G}\left(Y+\overline{Y}\right)\right)=\left(R\cdot\overline{G}\right)$$

- Zunächst klammert man die beiden gemeinsamen Variablen aus, hier $\left(R\cdot\overline{G}\right)$.

- In der Klammer steht dann die andere Variable und ihre Negation. Daraus kann entweder eine 0 (VerUNDdung) oder eine 1 (VerODERung) folgen. Die Klammer fällt also in jedem Fall weg.

$$\left(\overline{R}\cdot\overline{Y}\cdot G\right)+\left(\overline{R}\cdot Y\cdot\overline{G}\right)+\left(R\cdot\overline{Y}\cdot\overline{G}\right)+\left(R\cdot Y\cdot\overline{G}\right)$$
$$=\left(\overline{R}\cdot\overline{Y}\cdot G\right)+\left(\overline{R}\cdot Y\cdot\overline{G}\right)+\left(R\cdot\overline{G}\right)$$

2) Man sucht Terme, die sich in einer Variablen und im Fehlen einer anderen Variable unterscheiden.

Bsp.:

$$\left(\overline{R}\cdot\overline{Y}\cdot G\right)+\left(\overline{G}\cdot\left(\left(\overline{R}\cdot Y\right)+R\right)\right)$$
$$=\left(\overline{R}\cdot\overline{Y}\cdot G\right)+\left(\overline{G}\cdot R\right)+\left(\overline{G}\cdot Y\right)$$

- Man klammert die in beiden Termen vorhandene Variable aus, hier $\overline{G}$.

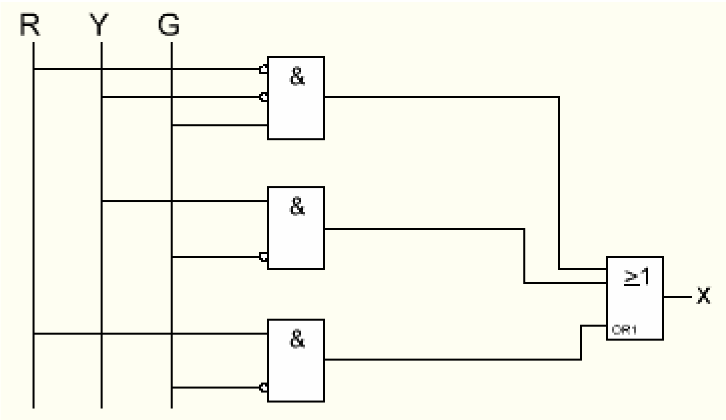
- In der Klammer steht nun ein Ausdruck, der über das Distributivgesetz ausmultipliziert und auch ausaddiert (Distributiv-Gesetz Sonderregel!!!) werden kann.

- Nun erhält man zwei Klammerausdrücke, in einem steht wieder ein komplementäres Element, welches entweder eine 0 (VerUNDdung) oder eine 1 (VerODERung) ergibt.

- Zum Schluss kann man den erhaltenen Term ausmultiplizieren oder ausaddieren und so weiter vereinfachen.

$$\left(\overline{R}\cdot\overline{Y}\cdot G\right)+\left(\overline{R}\cdot Y\cdot\overline{G}\right)+\left(R\cdot\overline{Y}\cdot\overline{G}\right)+\left(R\cdot Y\cdot\overline{G}\right)$$
$$=\left(\overline{R}\cdot\overline{Y}\cdot G\right)+\left(\overline{G}\cdot R\right)+\left(\overline{G}\cdot Y\right)$$

Als neue Schaltung würde sich folgende ergeben:



3) 2 Terme unterscheiden sich durch das Fehlen mehrerer Variablen und sind in einer Variable verschieden.

$$Y+\left(R\cdot\overline{Y}\cdot\overline{G}\right)$$
$$=Y+\left(R\cdot\overline{G}\right)$$

- Man substituiert für die jene Variablen, die in einem Term fehlen, eine Hilfsvariable:

$$k=R\cdot\overline{G}$$

- Nun wendet man das Distributivgesetz an

$$Y+\left(\overline{Y}\cdot k\right)=\left(Y+\overline{Y}\right)\cdot\left(Y+k\right)$$

- In der einen Klammer steht wieder ein komplementäres Element, welches entweder eine 0 (VerUNDdung) oder eine 1 (VerODERung) ergibt.

$$\left(Y+\overline{Y}\right)\cdot\left(Y+k\right)=1\cdot\left(Y+k\right)=Y+k$$
$$=Y+\left(R\cdot\overline{G}\right)$$

Fehlersuche:
- Abschreibfehler
- Distributivgesetz für die Addition
- Negationsstriche vergessen
- falsch umgeformt

2. Möglichkeit: KV Diagramm

- Karnaugh – Veitch Diagramme

- KV Diagramme bieten einen graphischen Weg zu Minimierung von Schaltfunktionen

- Stellt die Funktionstabelle graphisch dar

- Rechteckschema → jedes Feld entspricht einer Zeile in der Wahrheits- (Funktions) Tabelle

Beispiel: Schaltfunktion mit 2 Eingängen → 2^2 = 4 Tabellen zeihen
= 4 Felder im KV Diagramm

A	B	y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

A / B	0	1
0	1	1
1	0	0

In das KV Diagramm wird der Tabelleninhalt übertragen

Bei einer Schaltung mit 3 Eingängen hat die Funktionstabelle
2^3 = 8 Zeilen → 8 Felder im KV Diagramm

Das 8 Felder KV-Diagramm wird erzeugt, indem das 4-Felder Diagramm an der Senkrechten, rechten Kante gespiegelt wird.

		A	A	
	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	$A\cdot\overline{B}\cdot C$	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$
B	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$	$A\cdot B\cdot\overline{C}$	$A\cdot B\cdot C$	$\overline{A}\cdot B\cdot C$
			C	C

In der "neuen" Hälfte des KV - Diagrams gilt C = 1.