

Lösung der Aufgabe 7) des Aufgabenzettels

Ansatz 1:

$$\begin{aligned} & (A \cdot \bar{B} \cdot C) + (A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) + (\bar{A} \cdot B \cdot C) + (A \cdot B \cdot C) + (\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) \\ &= (A \cdot \bar{B} (C + \bar{C})) + (B \cdot C (A + \bar{A})) + (\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) \\ &= (A \cdot \bar{B}) + (B \cdot C) + (\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) \\ &= \bar{B} ((\bar{A} \cdot C) + A) + (B \cdot C) \\ &= \bar{B} (\bar{C} \cdot A) + (B \cdot C) \\ &= (\bar{B} \cdot \bar{C}) + (\bar{B} \cdot A) + (B \cdot C) \end{aligned}$$

Man erhält nicht die Lösung des Aufgabenzettels, aber auch eine richtige Lösung, wie noch gezeigt wird.

Ansatz 2:

$$\begin{aligned} & (A \cdot \bar{B} \cdot C) + (A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) + (\bar{A} \cdot B \cdot C) + (A \cdot B \cdot C) + (\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) \\ &= ((A \cdot C) \cdot (B + \bar{B})) + ((\bar{B} \cdot \bar{C}) \cdot (A + \bar{A})) + (\bar{A} \cdot B \cdot C) \\ &= (A \cdot C) + (\bar{B} \cdot \bar{C}) + (\bar{A} \cdot B \cdot C) \\ &= (\bar{B} \cdot \bar{C}) + (C ((\bar{A} \cdot B) + A)) \\ &= (\bar{B} \cdot \bar{C}) + C ((A + \bar{A}) \cdot (A + B)) \\ &= (\bar{B} \cdot \bar{C}) + C (A + B) \end{aligned}$$

Dieser Ansatz führt zu der auf dem Zettel angegebenen Lösung.

Die zwei Ansätze liefern verschiedene Lösungen, je nachdem, wie man anfängt zu vereinfachen. Um zu zeigen, dass sie beide eine richtige Lösung darstellen, kann man sie in einer Wahrheitstabelle vergleichen.

A	B	C	Ansatz 1	Ansatz 2
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
1	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Man sieht, dass beide Lösungen an den gleichen Stellen der Tabelle eine 1 liefern, sie daher gleich sind.

KV Diagramme

Schaltfunktion mit 4 Eingängen: → Funktionstabelle hat $2^4 = 16$ Zeilen
 → KV Diagramm hat 16 Felder

Es wird erzeugt aus dem 8 Felder KV-Diagramm, durch Spiegelung an der unteren waagrechten Kante.

	\overline{A}						
B		$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$	$A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$		D
		$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$	$A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$	$A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$	$\overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$		
		$\overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$	$A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$	$A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$		
		$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D$	$A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D$	$A \cdot B \cdot C \cdot D$	$\overline{A} \cdot B \cdot C \cdot D$		
		$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D$	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D$	$A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D$	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D$		
		\overline{C}					

In der „neuen“ Hälfte des KV Diagramms gilt $D = 1$.

Grafische Minimierung mit KV Diagrammen

Für die Minimierung mit KV-Diagramm ist der Nachbarschaftsbegriff wesentlich:

Zwei Felder heißen benachbart, wenn sie sich in einer Variablen unterscheiden.

	\overline{A}						
B		$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$	$A \cdot \overline{B} \cdot C$	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$		D
		$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$	$A \cdot B \cdot \overline{C}$	$A \cdot B \cdot C$	$\overline{A} \cdot B \cdot C$		
		\overline{C}					

	\overline{A}						
B		$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$	$A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$		D
		$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$	$A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$	$A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$	$\overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$		
		$\overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$	$A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$	$A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$		
		$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D$	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D$	$A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D$	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D$		
		\overline{C}					

Die oben Markierten Felder sind Beispiele für benachbarte Felder. Man muss beachten, dass auch die beiden außen liegenden Felder benachbart sind, da auch sie sich nur in einer Variablen unterscheiden.

Für 3 Variablen gilt: Jedes Feld hat 3 Nachbarfelder

Für 4 Variablen gilt: Jedes Feld hat 4 Nachbarfelder

Vorgehensweise bei der Minimierung:

1) Funktionstabelle ins KV-Diagramm eintragen

- alle „1“-Felder im KV-Diagramm entsprechen einem Minterm

2) Benachbarte „1“-Felder werden eingekreist und bilden zusammen einen Produktterm, der die Minterme in den eingekreisten „1“-Feldern ersetzt. Es können 2,4,8 und 16 Felder (bei 4 Variablen) zusammen eingekreist werden. Je mehr Felder eingekreist werden, desto mehr Minterme werden durch einen immer einfacheren Produktterm ersetzt.

Bsp.: Ampelschaltung

	G			
	0	1	0	1
R	1	0	0	1
	Y			

Man betrachtet nun die benachbarten Kreise (Bsp. Die beiden unteren Kreise)

R: Beide Kreise liegen im Bereich $\rightarrow R$ kommt vor

G: Kein Kreis liegt im Bereich $\rightarrow \bar{G}$ kommt vor

Y: Ein Kreis liegt drin, einer nicht $\rightarrow Y$ kommt nicht vor

Daraus folgt, dass die unteren Kreise zusammen $R \cdot \bar{G}$ ergeben.

Man kann „1“-Felder häufiger einkreisen. Dadurch lassen sich oft mehrere Variablen ersetzen.

Lösung ist die ODER-Verknüpfung aller erzeugten Produktterme:

$$(\bar{R} \cdot G \cdot \bar{Y}) + (R \cdot \bar{G}) + (\bar{G} \cdot Y)$$

In einem 2-er Block entfällt eine Variable in dem Produktterm, der diesen Block beschreibt.

In einem 4-er Block entfallen zwei Variablen in dem Produktterm, der diesen Block beschreibt.

Bsp.:

	A			
	0	1	1	0
B	0	1	1	0
	C			

Der eingekreiste Bereich entspricht A.

	A			
B	1	0	0	1
	1	0	0	1
			C	

Der eingekreiste Bereich entspricht \bar{A} .

FALSCH IST z.B.:

	A			
B	0	1	1	0
	0	0	1	1
			C	

Diese „1“-Felder lassen sich nicht zu viert zusammenfassen.

Beispiel für das 16-Felder KV-Diagramm:

	A				
B	1	1	1	1	
	1	1	0	0	
	1	1	0	0	
	1	0	0	0	
			C		D

Ergebnis der Minimierung: $(B \cdot \bar{C}) + (\bar{A} \cdot \bar{B}) + (\bar{B} \cdot \bar{D})$

In einem 8-er Block entfallen drei Variablen in dem Produktterm, der diesen Block beschreibt.

	A			
B	1	1	1	1
	1	1	1	1
			C	

Ergebnis der Minimierung: 1

Sind alle Felder eines KV-Diagramms eingekreist, entfallen alle Variablen und das Ergebnis lautet 1.

	A				
B	1	1	1	1	
	0	0	0	0	
	0	0	0	0	
	1	1	1	1	
			C		D

Ergebnis der Minimierung: \bar{B}

Anwendung an Aufgabe 9 (Aufgabenzettel)

		A			
		0	0	1	0
B		0	0	1	1
		1	1	1	1
		0	1	1	0
					C

D

Roter Kreis: $(B \cdot D)$

Grüner Kreis: $(A \cdot D)$

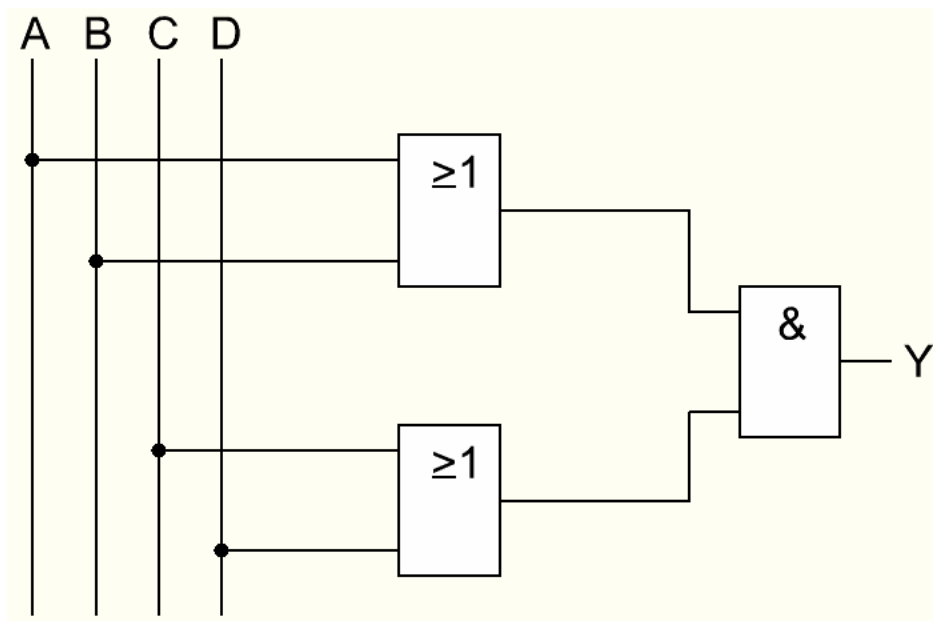
Gelber Kreis: $(A \cdot C)$

Blauer Kreis: $(B \cdot C)$

Die aus den Kreisen erhaltenen Produktterme ergeben nun in der VerODERung eine vereinfachte Form der Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned}
 Y &: (A \cdot D) + (A \cdot C) + (B \cdot C) + (B \cdot D) \\
 &= (A \cdot (C + D)) + (B \cdot (C + D)) \\
 &= (A + B) \cdot (C + D)
 \end{aligned}$$

Logikplan:



Ziel der Minimierung mit KV-Diagramm

- möglichst große Kreise bilden: → viele Minterme („1“-Felder) werden durch Produktterme ersetzt
→ resultierender Produktterm hat wenige Eingangsvariablen
- möglichst wenige Kreise: → wenige Produktterme in der Lösung

Können Produktterme aus der Lösung weggelassen werden?

- Essentielle Produktterme: Terme, die mindestens einen Minterm („1“-Felder) enthalten, der in keinem anderen Produktterm enthalten ist.
- Redundante Produktterme: Terme, die nur Minterme enthalten, die bereits von essentiellen Produkttermen abgedeckt sind.
- Nicht-Essentielle Produktterme: Produktterme, die weder essentiell noch redundant sind.

Bsp.:

		A				
		0	0	0	0	
		1	0	0	1	
B		0	1	1	1	
		0	1	1	0	D
				C		

essentiell: $A \cdot D, \bar{A} \cdot B \cdot \bar{D}$

redundant: ---

nicht-essentiell: $B \cdot C \cdot D, \bar{A} \cdot B \cdot C$

Die maximale Lösung enthält die ODER-Verknüpfung aller essentiellen Produktterme, sowie die nicht-essentiellen, die nötig sind, um alle „1“-Felder abzudecken.
(redundante und nicht benötigte nicht-essentielle Terme werden weggelassen)

Partielle Funktionen:

Diese Funktionen zeichnen sich dadurch aus, dass sie nicht an jeder Stelle eindeutig definiert sind.

Ein Beispiel ist z.B. ein elektronisches Garagentor.

Es gibt einen Schalter mit zwei Positionen AUF und AB.

Am Garagentor gibt es zwei Sensoren x_1 und x_2 , welche messen, ob das Garagentor offen oder geschlossen ist.

Der Stromkreis für den Motor kann umgepolt werden, sodass sich der Motor entweder rechtsrum (Re) oder linksrum (Li) dreht.

Stellt man die Wahrheitstabelle auf, so wird schnell deutlich, dass es Möglichkeiten gibt, für die die Schaltung nicht definiert ist.

Ein Beispiel wäre zum Beispiel, dass beide Sensoren eine „1“ ausgeben, das Tor also oben und gleichzeitig unten wäre.

Beispiel für eine Wahrheitstabelle einer partiellen Funktion (Auszug):

Auf	Ab	x_1	x_2	Re	Li
0	0	1	1	x	x
1	1	0	0	x	x

Im KV Diagramm werden an den Stellen, die nicht definiert sind, entweder Nullen oder Einsen gesetzt. Dadurch wird die Vereinfachung dieser Funktionen erheblich einfacher.