<u>Zahlensysteme und Codes:</u>

Computer arbeiten intern mit zwei leicht zu unterscheidenden Zuständen
0 = keine Spannung
1 = Spannung

Wichtigste Aufgabe von Computern: RECHNEN !!
=> Zahlen müssen mit zwei Zuständen repräsentiert (=kodiert) werden

<u>Unser Zahlensystem: Dezimalsystem</u>
Bsp.: $37 = 3 \cdot 10 + 7 \cdot 1$
- Ziffern (Koeffizienten) $\in \{0,1,2,3,4,...,9\}$
- jede Ziffer hat eine Wertigkeit $(10^0, 10^1, 10^2, ...)$
  → die zur Stelle passende Zehnerpotenz
- höchstwertigste Stelle steht ganz links
- niederwertige Stellen in absteigender Reihenfolge rechts davon

<u>Zahlensystem des Computers: Binär-(Dual) System</u>
Bsp.: 1011
- Ziffern (Koeffizienten) $\in \{0,1\}$ heißen Bits
- jede Ziffer hat eine Wertigkeit $(2^0, 2^1, 2^2, ...)$
  → die zur Ziffer passende Zweierpotenz
- höchstwertigste Stelle steht ganz links
- niederwertige Stellen in absteigen der Reihenfolge rechts davon

	Dezimal		Binär			
Stellenwert	10^1	10^0	2^3	2^2	2^1	2^0
Ziffer	3	7	1	0	1	1

<u>Umrechnen von Binär- in Dezimalsystem</u>

Jedes Bit (Ziffer) mit ihrer Stellenwertigkeit multiplizieren und aufaddieren.

Bsp.:

$$\begin{aligned}[1011]_2 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 8 + 0 + 2 + 1 \\ &= 11\end{aligned}$$

Umrechnen von Dezimal- in Binärsystem

gegeben a $\in \mathbb{N}_0$

1) größte Zweierpotenz finden $\left(2^i \; mit \; a \geq 2^i\right)$

2) setze $a \leftarrow a - 2^i$ (2^i abziehen von a)

3) Setze die Stelle i in der Binärdarstellung auf 1

4) Schritte 1-3 wiederholen, solange a > 0 ist

5) Am Schluss alle nicht auf 1 gesetzten Stellen auf 0 setzen

Bsp.:

$$a = 37$$

$$\begin{aligned} &2^5 = 32 < 37 \Rightarrow a = 37 - 32 = 5, \quad 5.\,Stelle = 1 \\ &2^2 = 4 < 5 \quad \Rightarrow a = 5 - 4 = 1, \quad 2.\,Stelle = 1 \\ &2^0 = 1 = 1 \quad \Rightarrow a = 1 - 1 = 0, \quad 0.\,Stelle = 1 \end{aligned}$$

2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	0	1	0	1

Alternative zur Umrechnung Dezimal → Binär

gegeben a $\in \mathbb{N}_0$

1) $a \leftarrow \frac{a}{2}$ (a durch 2 teilen (Ganzzahldivision mit Rest))

2) Stelle i wird der Rest der Ganzzahl

3) erhöhe i

4) Schritte 1-3 wiederholen, solange a > 0

Bsp.:

$$a = \frac{69}{2} = 34 \quad \text{Rest } 1 \quad \Rightarrow 0.\,\text{Stelle} = 1$$

$$a = \frac{34}{2} = 17 \quad \text{Rest } 0 \quad \Rightarrow 1.\,\text{Stelle} = 0$$

$$a = \frac{17}{2} = 8 \quad \text{Rest } 1 \quad \Rightarrow 2.\,\text{Stelle} = 1$$

$$a = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{Rest } 0 \quad \Rightarrow 3.\,\text{Stelle} = 0$$

$$a = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{Rest } 0 \quad \Rightarrow 4.\,\text{Stelle} = 0$$

$$a = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{Rest } 0 \quad \Rightarrow 5.\,\text{Stelle} = 0$$

$$a = \frac{1}{2} = 0 \quad \text{Rest } 1 \quad \Rightarrow 6.\,\text{Stelle} = 1$$

$$\Rightarrow 69 = [1000101]_2$$

<u>Elementare Rechenoperationen mit Binärzahlen</u>

Addition: - man arbeitet von rechts nach links
- man erzeugt nach jedem Zwischenschritt eine Ergebnisstelle und eine „Merke“- Stelle

Bsp.:

$$[10011010]_2 = 154$$

$$[110110]_2 = 54$$

$$\begin{array}{ll} & 1\,0\;\;0\,1\,1\,0\,1\,0 \\ + & 0\,0_1 1_1 1_1 0_1 1_1 1\,0 \\ = & 1\,1\;\;0\,1\,0\,0\,0\,0 = 16 + 64 + 128 = 208 \end{array}$$

Vorgehensweise für die Addition von Binärzahlen
Diese Vorgehensweise lässt sich verallgemeinern, indem alle Möglichkeiten für Eingangsbits und Merkerbits in einer Tabelle zusammengefasst werden:

A	B	Merker	Ergebnis	Merker (neu)
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Diese Art der Beschreibung einer digitalen (bool'schen) Funktion durch eine Tabelle nennt man Funktionstabelle oder Wahrheitstabelle.

Darstellung negativer Zahlen:

Bei der Darstellung negativer Zahlen in Binärformat ist die Zweierkomplement-Darstellung allgemein üblich.

Umwandlung einer positiven Binärzahl in eine negative Binärzahl in Zweierkomplement- Darstellung.

1) - Bitweises Invertieren
2) - Addition von 1

Bsp.: -18

$$18 = 2^4 + 2^1 \Rightarrow [10010]_2$$
$$in\ 8\ Bit = [00010010]_2$$

1) invertieren: $[11101101]_2$
2) +1: $+[00000001]_2$

$\Rightarrow -18 = [11101110]_2$ (im Zweierkomplement, sonst ist $[11101110]$ = 238)

Das erste Bit ist in dieser Darstellung das Vorzeichenbit. Ist es gesetzt, ist die Binärzahl negativ.

Mit 8 Bit können die Zahlen von

$$\begin{aligned}[0000.0000]_2 &= 0 \\ bis\ [1111.1111]_2 &= 255\end{aligned}$$

dargestellt werden.

Bei Verwendung des Zweierkomplements wird der Zahlenbereich aufgeteilt:

positiven Zahlen von 0 bis $[0111.1111]_2$ = 127
negative Zahlen von $[1000.0000]_2$ = 128 (-128) bis 256 (-1)

Betrachtung von -1

$$\begin{aligned}1 &= 0000.0001 \\ inv. &= 1111.1110 \\ +1 &= 1111.1111 = -1\end{aligned}$$

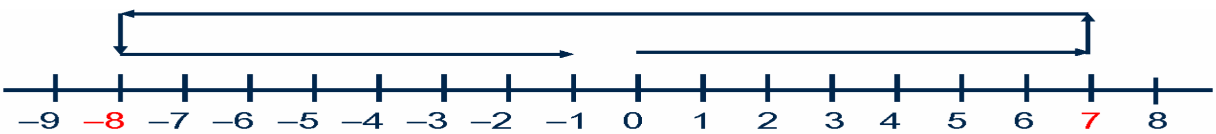
Betrachtung von -128

$$\begin{aligned}128 &= 1000.0000 \\ inv. &= 0111.1111 \\ +1 &= 1000.0000 = -128\end{aligned}$$

=> negative Zahlen von

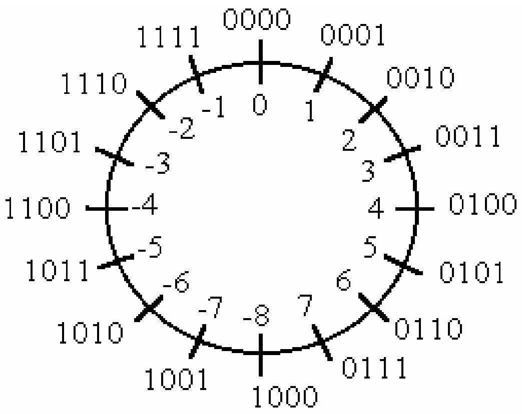
$$\begin{aligned}[1000.0000]_2 &= -128(128) \\ bis\ [1111.1111]_2 &= -1(255)\end{aligned}$$

Darstellung auf Zahlengerade



Quelle: http://old.hki.uni-koeln.de

Zahlenkreis für 4-Bit



Quelle: http://www.etech.fh-trier.de/

Addition von Binärzahlen im Zweierkomplement (Subtraktion von Binärzahlen)

Bsp.:

$$26-18=26+(-18)$$

$$\begin{aligned} 26 &= [0001.1010]_2 \\ +(-18) &= [1110.1110]_2 \\ &= [00001000]_2 = 8 \end{aligned}$$