

## Berechnung des Arbeitsaufwands einer segmentierten Faltung

### 1. Variablenzuordnung

$x[n]$	Eingangssignal
$L_x$	Länge von $x[n]$
$N$	Länge eines Segments $x_k[n]$
$h[n]$	Impulsantwort
$L_h$	Länge von $h[n]$
$P$	Länge eines Segments $h_k[n]$
$y[n]$	Ausgangssignal
$L_y$	Länge von $y[n]$

### 2. Berechnung der Teilfaltungsergebnisse

Für jedes Element  $x_k[n]$  muss zunächst eine FFT der Länge  $N$  durchgeführt werden. Diese benötigt bei der Nutzung des Radix-2 Algorithmus:

$$\frac{N}{2} \cdot \log_2(N) \quad \text{Multiplikationen und}$$

$$N \cdot \log_2(N) \quad \text{Additionen.}$$

Anschließend wird das Ergebnis dieser FFT mit allen Segmenten der transformierten

Impulsantwort  $h[n]$  multipliziert.  $h[n]$  besitzt die Länge  $L_h$  und wurde in  $\frac{L_h}{P}$  Segmente

geteilt. Somit muss der Prozess genau  $\frac{L_h}{P}$ -mal durchlaufen werden. Somit werden zusätzlich

$$\frac{L_h}{P} \quad \text{Multiplikationen}$$

benötigt.

Die Ergebnisse dieser Multiplikationen werden nachfolgend mit der IFFT transformiert. Diese hat den gleichen Arbeitsaufwand wie die FFT, somit sind folgende Operationen nötig:

$$\frac{L_h}{P} \cdot \left( \frac{N}{2} \cdot \log_2(N) \right) \quad \text{Multiplikationen und}$$

$$\frac{L_h}{P} \cdot (N \cdot \log_2(N)) \quad \text{Additionen.}$$

Diese Operationen müssen für jedes Segment  $x_k[n]$  durchgeführt werden, also genau  $\frac{L_x}{N}$  mal, wenn  $x[n]$  mit der Länge  $L_x$  angenommen wird und ein Segment  $x_k[n]$  die Länge  $N$  hat.

Insgesamt wird daher der folgende Rechenaufwand benötigt:

$$\frac{L_x}{N} \cdot \left( \frac{L_h}{P} + \left( \frac{L_h}{P} + 1 \right) \cdot \frac{N}{2} \cdot \log_2(N) \right) \quad \text{Multiplikationen}$$

$$\frac{L_x}{N} \cdot \left( \left( \frac{L_h}{P} + 1 \right) \cdot N \cdot \log_2(N) \right) \quad \text{Additionen}$$

Wertetabelle:

Lx = Lh = Länge h[n] & x[n]		88200		
N	P	Multiplikationen	Additionen	Gesamt
1	1	1,56E+10	1,56E+10	3,11E+10
2	2	3,89E+09	3,89E+09	7,78E+09
4	4	2,43E+09	3,89E+09	6,32E+09
8	8	1,58E+09	2,92E+09	4,50E+09
16	16	1,00E+09	1,95E+09	2,95E+09
32	32	6,16E+08	1,22E+09	1,83E+09
64	64	3,67E+08	7,30E+08	1,10E+09
128	128	2,13E+08	4,26E+08	6,40E+08
256	256	1,22E+08	2,44E+08	3,66E+08
512	512	6,88E+07	1,38E+08	2,06E+08
1024	1024	3,84E+07	7,69E+07	1,15E+08
2048	2048	2,14E+07	4,28E+07	6,41E+07
4096	4096	1,19E+07	2,38E+07	3,58E+07
88200	88200	1,45E+06	2,90E+06	4,35E+06

Der Fall  $N = P = 1$  zeigt die diskrete Faltung, welche mit  $L_x \cdot (L_h + L_x - 1)$  für Multiplikationen und Additionen angenommen wird.

### 3. Betrachtung des Overlap-Add-Verfahrens

Die Operationen des Overlap-Add-Verfahrens sind Additionen, deren Anzahl von der Anzahl der Blöcke von  $x[n]$  und  $h[n]$  abhängt. Die Anzahl der zu berechnenden Summen des Verfahrens kann aus der Länge des Ausgangssignals  $L_y$  bestimmt werden. Jene Länge entspricht  $L_x + L_h - 1$ . Solange keine Überlappung in der Rechnung enthalten ist, wird auch keine zusätzliche Addition benötigt. Anhand eines Zahlenbeispiels mit  $N = P = 4$  wird deutlich, dass dieser Bereich genau  $N$  Ausgangswerte betrifft. Ebenso sind  $N$  Werte am Ende des Ausgangssignals nicht Teil einer Summe, sondern können direkt ausgegeben werden. Somit reduziert sich die Anzahl der Summen auf  $L_x + L_h - 1 - 2M$ .

$$\begin{array}{l}
 y_{11}[n] \\
 y_{12}[n] \\
 y_{21}[n] \\
 y_{22}[n] \\
 y_{31}[n] \\
 y_{32}[n] \\
 \hline
 y[n]
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 1 \ 3 \ 7 \ 13 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 1 \ 3 \ 7 \ 13
 \end{array}
 \right|
 \overbrace{\begin{array}{l}
 14 \ 14 \ 8 \\
 4 \ 12 \ 22 \\
 5 \ 11 \ 23 \\
 \\
 \\
 23 \ 37 \ 53
 \end{array}}^{P-1}
 \left|
 \begin{array}{l}
 33 \\
 37 \\
 \\
 77 \\
 61 \\
 70
 \end{array}
 \right|
 \overbrace{\begin{array}{l}
 24 \ 11 \ 4 \\
 34 \ 30 \ 16 \\
 20 \ 44 \ 62 \\
 9 \ 19 \ 39 \\
 87 \ 104 \ 121
 \end{array}}^{P-1}
 \left|
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 138 \\
 \dots
 \end{array}
 \right|
 \overbrace{\begin{array}{l}
 52 \ 23 \ 8 \\
 54 \ 46 \ 24 \\
 36 \ 76 \ 102 \\
 \dots
 \end{array}}^{P-1}
 \left|
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 121 \\
 \\
 \dots
 \end{array}
 \right|
 \left|
 \begin{array}{l}
 80 \ 35 \ 12
 \end{array}
 \right.$$

Zur Betrachtung der in den Summen enthaltenen Additionen werden zunächst Abschnitte in der Berechnung gesucht, welche die gleiche Anzahl von Additionen enthalten. Würde die gezeigte Berechnung fortgesetzt, wären im dritten Überlappungsabschnitt wieder vier Teilergebnisse vorhanden, der Zwischenbereich enthält nur eine Addition. Somit enthält ein Überlappungsabschnitt

$$\left( 2 \cdot \frac{L_h}{P} - 1 \right) \cdot (P - 1) \text{ Additionen.}$$

Im Beispiel sind dies

$$\left( 2 \cdot \frac{L_h}{P} - 1 \right) \cdot (P - 1) = \left( 2 \cdot \frac{8}{4} - 1 \right) \cdot (4 - 1) = 9 \text{ Additionen.}$$

Dies kann am Beispiel auch direkt geprüft werden, der zweite Überlappungsabschnitt hat genau 9 Additionen. Dieser Zusammenhang kann auch bei anderen Berechnungen festgestellt werden. Er gilt, sobald die maximale Überlagerungsanzahl erreicht ist, also genau

ab jenem Abschnitt, bei dem der  $\left( \frac{L_h}{P} + 1 \right)$ -te Ergebnisblock berechnet wird. Die

Zwischenbereiche enthalten zu diesem Zeitpunkt

$$\frac{L_h}{P} - 1 \text{ Additionen.}$$

Die Bereiche vor und nach diesem Zustand entwickeln sich mit dem Faktor zwei. Dies wird ersichtlich, wenn man eine Berechnung betrachtet, welche mehr Segmente von  $h[n]$  nutzt.

Ein beliebiger Überlappungsbereich einer solchen Berechnung kann, solange der zuvor gezeigte Zustand nicht erreicht ist, mit der Anzahl von  $2i \cdot (P-1)$  Additionen beschrieben werden.  $i$  ist ein Laufindex einer Summe, welche alle Bereiche erfassen soll, in denen dieser Zusammenhang gilt. Die Summe läuft von 1 bis  $\frac{L_h}{P} - 1$ , also genau bis zu dem letzten Ergebnisblock, bevor die maximale Überlagerungsanzahl erreicht ist. Zusätzlich zu den Überlappungsbereichen können auch die Zwischenbereiche durch einen Summanden des Wertes  $i$  erfasst werden. Die Summe sieht folglich so aus:

$$\sum_{i=1}^{\frac{L_h}{P}-1} 2i \cdot (P-1) + i = \sum_{i=1}^{\frac{L_h}{P}-1} i \cdot (2P-1)$$

Diese Summe an Additionen wird sowohl am Anfang der Berechnung als auch am Ende fällig. Somit wird ein Faktor zwei hinzugefügt. Würde man die Summe dann jedoch berechnen, fällt auf, dass man den einen Zwischenbereich mit der maximalen Anzahl an Additionen mehr erfasst, welcher wieder abgezogen werden muss. Die Anzahl der Additionen bis zur maximalen Überlagerungsanzahl kann somit mit

$$2 \cdot \left( \sum_{i=1}^{\frac{L_h}{P}-1} i \cdot (2P-1) \right) - \left( \frac{L_h}{P} - 1 \right)$$

beschrieben werden.

Zur Beschreibung der Gesamtzahl der Additionen fehlt nun noch der Faktor, welcher die Anzahl der Bereiche mit maximaler Überlagerungsanzahl beschreibt. Dieser setzt sich

zusammen aus der Anzahl der Bereiche mit Additionen  $\frac{L_x}{N} + \frac{L_h}{P} - 2$ , von welchen alle

Bereiche abgezogen werden, die in der zuvor ermittelten Summe erfasst sind. Der Faktor ist demnach

$$\left( \frac{L_x}{N} + \frac{L_h}{P} - 2 \right) - 2 \cdot \left( \frac{L_h}{P} - 1 \right) = \frac{L_x}{N} - \frac{L_h}{P}.$$

Mit diesen Überlegungen kann nun die Anzahl der Additionen für das Overlap-Add Verfahren angegeben werden. Sie beträgt:

$$\underbrace{\left[ 2 \cdot \left( \sum_{i=1}^{\frac{L_h}{P}-1} i \cdot (2P-1) \right) - \left( \frac{L_h}{P} - 1 \right) \right]}_{\text{Anfang / Ende}} + \underbrace{\left[ \left( \frac{L_x}{N} - \frac{L_h}{P} \right) \cdot \left( \left( 2 \cdot \frac{L_h}{P} - 1 \right) \cdot (P-1) + \frac{L_h}{P} - 1 \right) \right]}_{\text{maximale Überlagerungsanzahl erreicht}}$$

Ein System, für welches  $\frac{L_x}{N} = \frac{L_h}{P}$  gilt, erreicht folglich nie die maximale Überlagerungsanzahl.

Somit fällt für die im vorigen Abschnitt gezeigten Betrachtungen dieser Teil der Formel immer weg. Dieser kann jedoch für eine Abschätzung der benötigten Additionen genutzt werden, weil er den maximal möglichen Wert ausgibt.

Wertetabelle:

Lx = Lh = Länge h[n] & x[n]		88200	
N	P	Additionen	Abschätzung
2	2	5,83E+09	1,16E+10
4	4	3,40E+09	6,78E+09
8	8	1,82E+09	3,63E+09
16	16	9,41E+08	1,87E+09
32	32	4,78E+08	9,54E+08
64	64	2,40E+08	4,81E+08
128	128	1,20E+08	2,41E+08
256	256	6,02E+07	1,20E+08
512	512	3,00E+07	6,04E+07
1024	1024	1,49E+07	3,01E+07
2048	2048	7,39E+06	1,49E+07
4096	4096	3,44E+06	7,40E+06
88200	88200	0	1,75E+06