

Segmentierte Faltung

1. Einleitung

Eine Faltung kostet Zeit, die direkte Berechnung ist eine der rechenintensivsten Anwendungen der Signalverarbeitung. Selbst auf schnellen Rechnern benötigen Berechnungen von Faltungen bei Längen von einer Sekunde ein Vielfaches der Samplelänge an Berechnungszeit. Abhilfe schafft die zyklische Faltung mit Hilfe der FFT, welche die Berechnungszeit erheblich senkt. Doch auch bei der FFT steigt die Berechnungszeit mit größeren FFT-Blocklängen. Abhilfe schafft die segmentierte Faltung, welche durch ein Zerlegen von Eingangssignal und, je nach Anwendung, der Impulsantwort die langen Blöcke zur Berechnung der Faltung auf kleinere Blöcke herunterbricht.

2. Segmentieren des Eingangssignals

Das Eingangssignal $x[n]$ wird in seiner Länge als unendlich lang angenommen. Zur besseren Betrachtung wird in diesem Beispiel allerdings mit einem endlichen Signal angesetzt, um die Berechnung deutlicher zu machen.

$$x[n] = [1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1] \text{ (Länge } N = 8)$$

Die Impulsantwort wird mit

$$h[n] = [1, 4] \text{ (Länge } M = 2)$$

angenommen. Das Ergebnis dieser Faltung kann natürlich ohne weitere Hilfsmittel über die Faltungssumme

$$y[n] = \sum_{m=0}^7 h[n] \cdot x[n-m]$$

berechnet werden. Dazu wird die Impulsantwort mit Zero-Padding auf die Länge N ergänzt (Anm.: Nur bei zyklischer Faltung über FFT nötig).

$$h[n] = [1, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

Anschließend wird die Berechnung durchgeführt. Das Faltungsergebnis hat, wenn die angehängten Nullen wieder entfernt werden, die Länge $M + N - 1$.

$$y[n] = \left[\overbrace{1, 6, 11, 16, 20, 19, 14, 9, 4}^{M+N-1}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right]$$

Dieses Ergebnis dient anschließend zu Vergleichszwecken und hilft beim Verständnis der Erklärung der segmentierten Faltung.

Zur Berechnung der segmentierten Faltung wird das Eingangssignal $x[n]$ in Segmente der Länge L zerlegt. In diesem Beispiel nehmen wir als einfachen Fall $L = 2$ an, somit ist kein Zero-Padding erforderlich. Daraus ergeben sich nun die Segmente $x_m[n]$. Ein Segment beginnt jeweils bei $(m-1)L$ und endet bei $mL-1$. Die Segmente können daher beschrieben werden als

$$x_m[n] = \begin{cases} x[n] & \text{wenn } (m-1)L \leq n \leq mL-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x_1[n] = [1, 2] \quad (0 \leq n \leq 1)$$

$$x_2[n] = [3, 4] \quad (2 \leq n \leq 3)$$

$$x_3[n] = [4, 3] \quad (4 \leq n \leq 5)$$

$$x_4[n] = [2, 1] \quad (6 \leq n \leq 7)$$

Die Segmente von $x[n]$ werden nun mit der Impulsantwort $h[n]$ gefaltet. Die Ergebnisse $y_m[n]$ lauten wie folgt:

$$y_1[n] = [1, 6, 8]$$

$$y_2[n] = [3, 16, 16]$$

$$y_3[n] = [4, 19, 12]$$

$$y_4[n] = [2, 9, 4]$$

Vergleicht man diese Werte mit der zuvor berechneten Faltung fallen einige gleiche Werte auf. Dass nicht alle Werte gleich sind liegt an einer Überlappung der Ergebnissegmente. Diese beträgt immer $L-1$, ist also in diesem Fall gleich 1. Setzt man dies nun einmal in dem Beispiel um, wird der am schwierigsten zu erklärende Schritt der segmentierten Faltung sichtbar.

$$\begin{array}{r}
 + \\
 + \\
 + \\
 y[n]
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 1 & 6 & \overbrace{8}^{L-1} & & \overbrace{16}^{L-1} & & \overbrace{12}^{L-1} & \\
 \hline
 & & 3 & 16 & 16 & & & \\
 \hline
 & & & & 4 & 19 & 12 & \\
 \hline
 & & & & & & 2 & 9 & 4 \\
 \hline
 1 & 6 & 11 & 16 & 20 & 19 & 14 & 9 & 4
 \end{array}$$

Die überlappenden Bereiche werden addiert, dadurch erhält man das Faltungsergebnis $y[n]$. Je größer die Segmente sind, desto größer werden die Überlappungsbereiche, in denen addiert wird.

3. Segmentieren von Eingangssignal und Impulsantwort

Auch die Impulsantwort kann segmentiert werden, um die Berechnung zu optimieren. Dies ist bei langem Impulsantworten nötig, um zu verhindern, dass eine Zerlegung des Eingangssignals nicht anschließend zu einem Zero-Padding eben jener Segmente führt. Stellt man sich vor, dass ein Segment von $x[n]$ die Länge $L = 4$ besitzt und die genutzte Impulsantwort eine Länge $M = 88200$ aufweist, so wäre für die Faltung via FFT ein Zero-Padding der Segmente auf die Länge der Impulsantwort nötig. Dieses benötigt zusätzliche Rechenzeit, welche durch ein Segmentieren der Impulsantwort vermieden werden kann.

Zur Betrachtung des Rechenablaufs wird erneut mit einem Zahlenbeispiel angesetzt, welches die allgemeine Formelschreibweise erläutern soll.

$$x[n] = [1, 2, 3, \dots, 31, 32] \quad (N = 32)$$

$$h[n] = [1, 1, 2, 2, 4, 4, 2, 1] \quad (M = 8)$$

Das Faltungsergebnis $y[n] = x[n] * h[n]$ hat die Länge $M + N - 1 = 39$ und enthält auf den ersten Stellen folgende Zahlenwerte:

$$y[n] = [1, 3, 7, 13, 23, 37, 53, 70, 87, 104, 121, 138, 155, 172, 189, \dots]$$

Die Impulsantwort wird nun in Segmente der Länge $\frac{M}{P}$ zerlegt, von denen anschließend P Stück vorliegen. Ein Segment läuft daher immer von $(p-1)\frac{M}{P}$ bis $p\frac{M}{P} - 1$. Ein Segment von $h[n]$ kann somit als

$$h_p \left[n - (p-1)\frac{M}{P} \right] = \begin{cases} h[n], & \text{wenn } (p-1)\frac{M}{P} \leq n \leq p\frac{M}{P} - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben werden. Zum besseren Verständnis der Schreibweise ein Zahlenbeispiel. Es wird für das Beispiel mit $L = P = 4$ angesetzt. Daraus ergibt sich für die Impulsantwort $h[n]$:

$$h_1[n] = [1, 1, 2, 2] \quad (0 \leq n \leq 3)$$

$$h_2[n-4] = [4, 4, 2, 1] \quad (4 \leq n \leq 7)$$

Das Eingangssignal wird, wie bereits im vorigen Abschnitt erklärt, ebenfalls in Segmente zerlegt. Dabei entstehen folgende Segmente $x_m[n]$:

$$\begin{array}{l}
 y_{11}[n] \\
 y_{12}[n] \\
 y_{21}[n] \\
 y_{22}[n] \\
 y_{31}[n] \\
 y_{32}[n] \\
 \hline
 y[n]
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 1 \ 3 \ 7 \ 13 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 1 \ 3 \ 7 \ 13
 \end{array}
 \right|
 \overbrace{\left| \begin{array}{l}
 14 \ 14 \ 8 \\
 4 \ 12 \ 22 \\
 5 \ 11 \ 23 \\
 \\
 \\
 23 \ 37 \ 53
 \end{array} \right|}^{L^{-1}}
 \left| \begin{array}{l}
 33 \\
 37 \\
 \\
 \\
 \\
 70
 \end{array} \right|
 \overbrace{\left| \begin{array}{l}
 24 \ 11 \ 4 \\
 34 \ 30 \ 16 \\
 20 \ 44 \ 62 \\
 9 \ 19 \ 39 \\
 \\
 87 \ 104 \ 121
 \end{array} \right|}^{L^{-1}}
 \left| \begin{array}{l}
 \\
 \\
 77 \\
 61 \\
 \\
 138
 \end{array} \right|
 \overbrace{\left| \begin{array}{l}
 52 \ 23 \ 8 \\
 54 \ 46 \ 24 \\
 36 \ 76 \ 102 \\
 \dots
 \end{array} \right|}^{L^{-1}}
 \left| \begin{array}{l}
 \\
 \\
 121 \\
 \\
 \\
 \dots
 \end{array} \right|
 \left| \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 80 \ 35 \ 12
 \end{array} \right.$$