

Mathe 1 Tutorium MS

Aufgabenblatt 2: Lösungen

Aufg. 1: Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich der folgenden Funktionen

a) $y = \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow D = \mathbb{R}, W = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

b) $y = \frac{x^2}{4x^2 - 16} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, W = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$

c) $y = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow D = \mathbb{R}, W = [1, \infty)$

d) $y = \ln|x| \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, W = \mathbb{R}$

e) $y = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, W = \mathbb{R}^-$

f) $y = e^{-x} \Rightarrow D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}^+$

Aufg. 2: Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten der folgenden Funktionen

a) $y = 4x^2 - 16 \Rightarrow$ nur gerade Exponenten \Rightarrow achsensymmetrisch

b)

$$y = \frac{x^2 - 1}{1 + x^2} = \frac{x^2 - 1 + 1 - 1}{x^2 + 1} = -\frac{2}{x^2 + 1}$$

\Rightarrow gerader Exponent wird nur durch positive Werte dividiert \Rightarrow achsensymmetrisch

c)

$$y = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

gerade?

$$\sin(x) \cdot \cos(x) \neq \sin(-x) \cdot \cos(-x)$$

ungerade?

$$-(\sin(x) \cdot \cos(x)) = \sin(-x) \cdot \cos(-x)$$

$$-(\sin(x) \cdot \cos(x)) = -(\sin(x) \cdot \cos(x))$$

\Rightarrow ungerade!

d)

$$y = \frac{1}{x-1}$$

gerade?

$$\frac{1}{x-1} \neq -\frac{1}{x+1}$$

ungerade?

$$-\frac{1}{x-1} \neq -\frac{1}{x+1}$$

\Rightarrow weder gerade, noch ungerade

e)

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow D = \mathbb{R}_0^+$$

\Rightarrow ohne negativen x – Bereich gibt es keine Symmetrie

f)

$$y = x^5 - x^3 + 2x$$

\Rightarrow nur ungerade Exponenten, daher ungerade

Aufg. 3: Berechnen Sie die reellen Nullstellen der folgenden Funktionen

a)

$$f(x) = x^2 - 5$$

$$x^2 - 5 = 0$$

$$x^2 = 5$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$$

b)

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x$$

$$x \cdot (x^2 + 4x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4+2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

c)

$$f(x) = x^4 - 4x^2 - 45 \Rightarrow \text{SUB: } z = x^2$$

$$z^2 - 4z - 45 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2+45} = 2 \pm \sqrt{47}$$

$$x_{1,2} = -\sqrt{2 \pm \sqrt{47}}$$

$$x_{3,4} = \sqrt{2 \pm \sqrt{47}}$$

d)

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$\rightarrow \sin(x)$ wird für alle $x = k \cdot \pi$ null

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{N})$$

e)

$$f(x) = x^2 + 0.75x + 10$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + 10 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} - \frac{640}{64}}$$

\Rightarrow Die Funktion besitzt keine reellen Nullstellen.

f)

$$f(x) = \sqrt{x \cdot e^x}$$
$$\sqrt{x \cdot e^x} = 0$$
$$x \cdot e^x = 0 \Rightarrow e^x \text{ wird nie Null}$$
$$x = 0$$

Aufg. 4: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Monotonie. (Tipp: In einigen Fällen ist eine Skizze möglicherweise hilfreich)

a)

$$f(x) = x^3 + x^2$$
$$\text{für } x < -\frac{2}{3} \rightarrow \text{streng monoton steigend}$$
$$\text{für } -\frac{2}{3} < x < 0 \rightarrow \text{streng monoton fallend}$$
$$\text{für } x > 0 \rightarrow \text{streng monoton steigend}$$

b)

$$f(x) = x^{67}$$
$$\text{für } x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{monoton steigend}$$

c)

$$f(x) = \ln(x+1)$$
$$\text{für } x > -1 \rightarrow \text{streng monoton steigend}$$

d)

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}}$$
$$\text{für } x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{streng monoton steigend}$$

e)

$$f(x) = \sin(x)$$
$$\text{für alle } (2k-1) \cdot \frac{\pi}{2} < x < (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \begin{array}{l} \text{wenn } k \text{ ungerade} \rightarrow \text{streng monoton fallend} \\ \text{wenn } k \text{ gerade} \rightarrow \text{streng monoton steigend} \end{array}$$

f)

$$f(x) = \tan(x)$$
$$\text{für alle } (2k-1) \cdot \frac{\pi}{2} < x < (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$\rightarrow \text{streng monoton steigend}$$

Aufg. 5: Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen die Umkehrfunktion. Geben Sie mit ihrer Hilfe auch den Wertebereich an.

a)

$$y = \sqrt{x}$$

$$y^2 = x \Rightarrow \bar{f}(y) = y^2$$

b)

$$y = x^2 - 2x$$

$$y + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x + 1)^2$$

$$\sqrt{y + 1} = x + 1$$

$$\sqrt{y + 1} - 1 = x \Rightarrow \bar{f}(y) = \sqrt{y + 1} - 1$$

c)

$$y = 2 \cdot e^{\frac{3}{4}x - 3}$$

$$\frac{y}{2} = e^{\frac{3}{4}x - 3}$$

$$\ln\left(\frac{y}{2}\right) + 3 = \frac{3}{4}x$$

$$\frac{4 \cdot \ln\left(\frac{y}{2}\right)}{3} + 4 = x \Rightarrow \bar{f}(y) = \frac{4 \cdot \ln\left(\frac{y}{2}\right)}{3} + 4$$

d)

$$y = \frac{1}{3x^2}$$

$$\frac{1}{3y} = x^2 \Rightarrow \bar{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{3y}}$$

e)

$$y = 4 \cdot \ln\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$\frac{y}{4} = \ln\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$e^{\frac{y}{4}} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{1}{e^{\frac{y}{4}}} = \frac{x}{2} \Rightarrow \bar{f}(y) = \frac{2}{e^{\frac{y}{4}}}$$