

Tutorium Mathe 2 MT

Aufgabe:

Untersuchen Sie mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums das Konvergenzverhalten der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \ln(n)}{3n+2}.$$

Lösung:

Das Leibniz-Kriterium muss in den zwei vorgegebenen Schritten geprüft werden. Damit die Reihe durch das Leibniz-Kriterium als konvergent bezeichnet werden kann, muss gelten

- 1) $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Betrachtet werden zunächst die ersten Summanden der Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \ln(n)}{3n+2} = 0 + \frac{\ln(2)}{8} - \frac{\ln(3)}{11} + \frac{\ln(4)}{14} - \frac{\ln(5)}{17} + \dots$$

Dabei fällt auf, dass erst ab dem dritten Glied der Reihe eine monoton fallende Folge vorliegt. Diese ist für das Leibniz-Kriterium trotzdem verwendbar, weil ein anderes Kriterium (\rightarrow Epsilon Kriterium) dies zulässt und besagt, dass diese Reihe trotzdem funktioniert.

Aus der Erklärung des Epsilon Kriteriums kann man folgern:

Ein endliches Anfangsstück der Reihe hat keinen Einfluss darauf, ob die Reihe konvergiert oder nicht. Darum ist es für die Anwendung des Kriteriums nur wichtig, dass die Koeffizientenfolge „schließlich“ eine monoton fallende Nullfolge ist.

Das Anfangsstück ist erst im Falle der Konvergenz wichtig, wenn man nach dem tatsächlichen Grenzwert der Reihe fragt (welcher hier nicht untersucht werden soll).

Damit ist die erste Bedingung des Leibniz-Kriteriums erfüllt. Die zweite kann man durch Umstellen der Summenform der Reihe erreichen, indem man diese ohne den alternierenden Anteil betrachtet und dann den Wert für n gegen unendlich laufen lässt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \ln(n)}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\sqrt[n]{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \frac{2}{n}} \rightarrow \frac{0}{3} = 0$$

Damit ist auch der 2. Teil des Leibniz-Kriteriums erfüllt, die Reihe ist also konvergent.