

Tutorium Mathe 1 MT

IV. Differential- & Integralrechnung

Differentialrechnung:

Die Differentialrechnung ist ein wichtiger Bestandteil der Analysis. Sie ermöglichtes, Funktionen zu differenzieren, was auch umgangssprachlich ableiten genannt wird. Dabei geht es in erster Linie darum, die Steigung eines Funktionsgraphen zu zeigen. Diese lässt sich durch Steigungsdreiecke annähern. Dadurch werden allerdings nur Sekantensteigungen beschrieben, die den Graphen immer noch in zwei Punkten berühren. Diese Sekantensteigungen werden durch den sogenannten Differenzenquotienten beschrieben. Dabei wird die Formel für die Steigungsdreiecke verallgemeinert:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

x und x_0 sind hierbei zwei beliebige verschiedene Punkte auf der x-Achse, $f(x)$ und $f(x_0)$ sind die zugehörigen Funktionswerte der zwei Punkte. Dazu hier ein Bild des Graphen der Funktion $f(x) = x^2$. An diesen wurde eine Sekante durch die Punkte $x = 2$ und $x = 4$ gelegt.

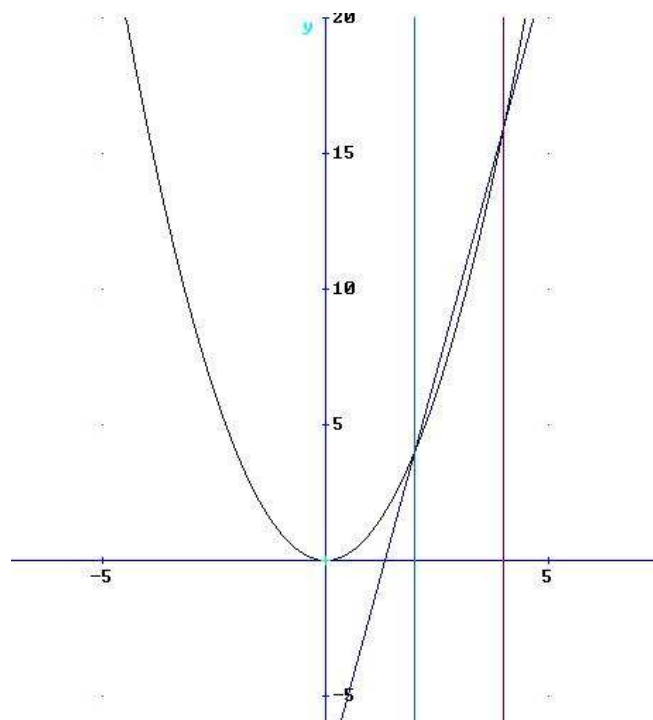


Abb. 1: Sekante am Graph der Funktion $f(x) = x^2$

Das zur Berechnung der Steigung notwendige Steigungsdreieck ergibt sich, wenn man den Funktionswert des linken Punktes des Intervalls (hier $x = 2$) als parallele zur x-Achse einzeichnet.

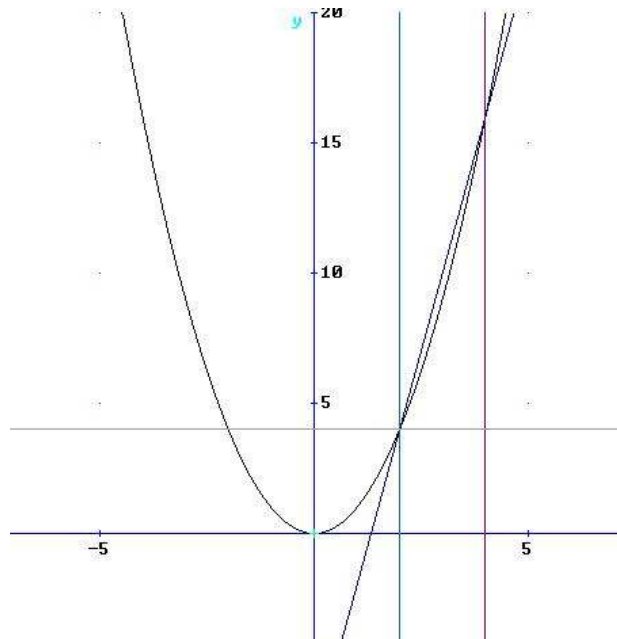


Abb. 2: Steigungsdreieck

Dieses Steigungsdreieck zeigt den oben genannte Differenzenquotienten als graphische Ansicht. Möchte man die Steigung der Sekante (von der ein Teil die Hypotenuse des Steigungsdreiecks ist) ermitteln, muss man die Länge der senkrechten Seite durch die der waagrechten teilen. Diese Längen entsprechen den Differenzen der Funktionswerte und der x-Werte. Man erhält daher für die Steigung m einer Sekante an einen Funktionsgraphen den Ausdruck:

$$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Für das gezeigte Beispiel an der Funktion wäre die Rechnung folgende:

$$x = 4, x_0 = 2$$

$$m = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{16 - 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Die Steigung der gezeigten Sekante ist also 6.

Die Sekante ist allerdings nur ein sehr ungenaues Maß für die wirkliche Steigung des Funktionsgraphen. Jenes wird besonders gut deutlich, wenn man sich neben einer Sekante an einen Graphen auch eine Tangente an einen Punkt des Graphen einzeichnet.

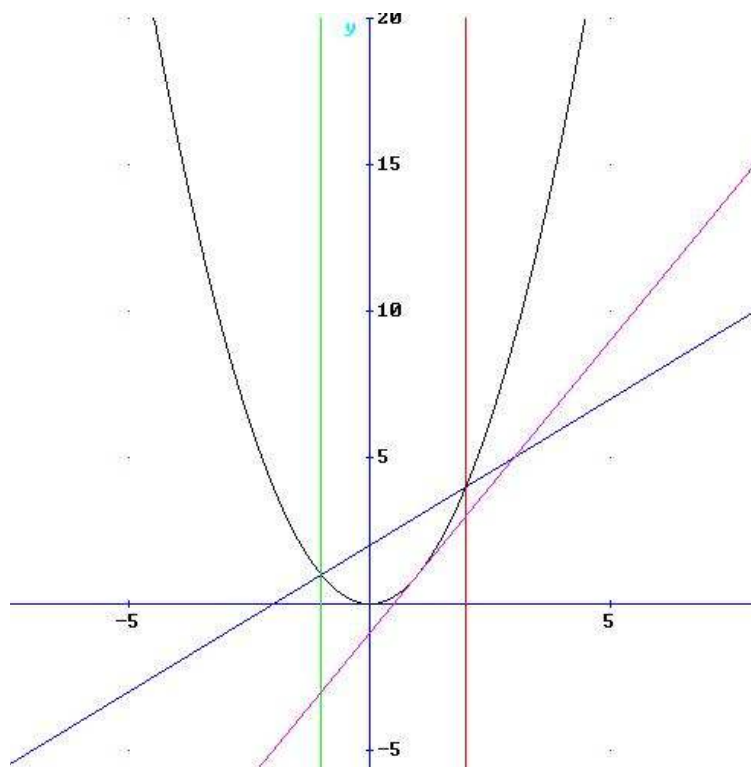


Abb. 3: Sekante und Tangente

Hier sieht man deutlich den Unterschied in der Steigung der blauen Gerade (Sekante) und der margenta gefärbten Gerade (Tangente). Hier wird auch die Problemstellung deutlich, warum man überhaupt Ableitungen berechnet. Die Näherung durch Sekanten ist durch den nicht mit Einbezogenen Zwischenraum der zwei Punkte bei vielen Graphen nicht anwendbar und generell viel zu ungenau. Daher ist es von Vorteil, wenn man mathematisch bestimmen kann, wie die Steigung der Tangente in einem Punkt des Graphen lautet. Dazu gibt es die Funktion der Ableitung.

Möchte man jetzt die Tangente an den Graphen von f berechnen, muss das Intervall des Steigungsdreiecks gegen 0 gehen. So wandern die zwei Punkte auf der Sekante immer weiter zusammen, bis irgendwann nur noch ein Punkt übrig ist. Man schränkt sozusagen ein Intervall mit unendlich vielen Werten auf einen einzigen ein. Dieser Grenzwert wird, wenn er existiert, als die Ableitung an diesem Punkt bezeichnet. Geschrieben wird dies als:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x)$$

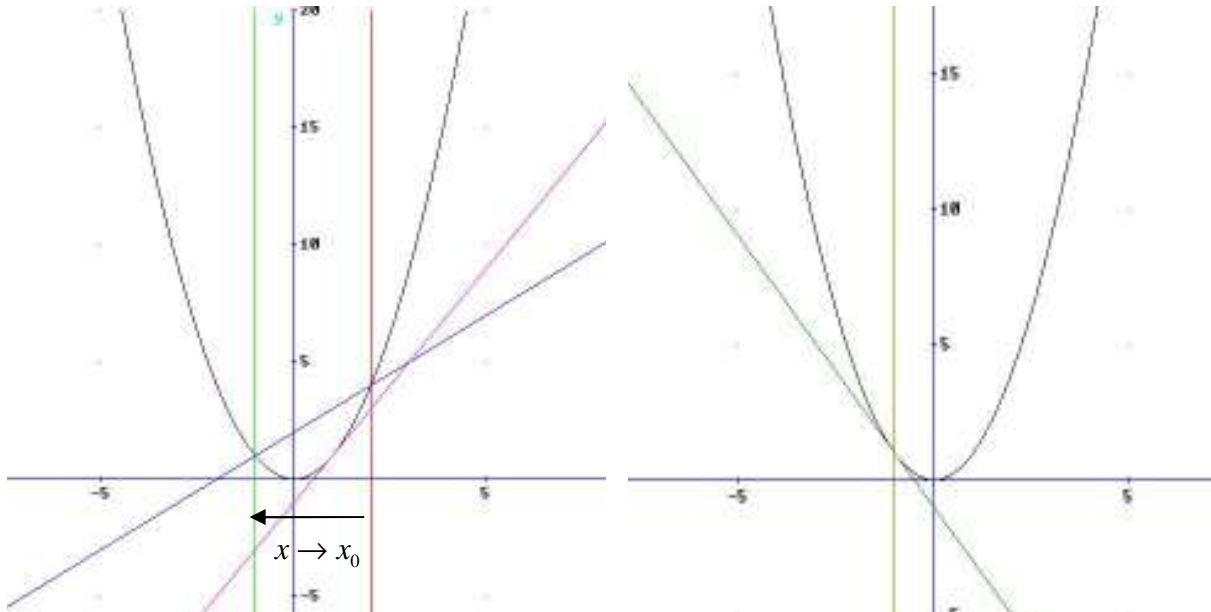


Abb. 4: Der rechte Wert wandert immer weiter auf den linken zu, bis sie sich schließlich im linken treffen.

Berechnen kann man dies zunächst über den Differenzenquotienten. Dies ist wesentlich komplizierter, als die Berechnung der Ableitung mit Hilfe der Ableitungsregeln, ist allerdings zur Herleitung gut geeignet.

Hier das Beispiel zu $f(x) = x^2$

- 1) Man setzt den Funktionsterm in den Differenzenquotienten ein.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$$

- 2) Als nächstes formt man den Zähler nach der dritten binomischen Formel um.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x + x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0}$$

- 3) Der entstandene Ausdruck lässt sich kürzen, sodass der Nenner wegfällt.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0)$$

- 4) Geht nun x gegen x_0 , kann man das Ergebnis ausrechnen.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0$$

Das Ergebnis dieser Rechnung gibt die Steigung der Tangente an den Graphen von $f(x) = x^2$ an und wird als 1. Ableitung bezeichnet. Geschrieben wird jene Ableitung auch als

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} f(x)$$

wobei dx und dy für jene unendlich kleine Intervalle stehen, die zur Berechnung genutzt werden.

Das Apostroph ist das Kennzeichen der Ableitungsordnung. In der Physik schreibt man dafür auch zum Teil $\dot{f}(x)$ und nutzt einen Punkt über den Funktionsnamen als Kennzeichnung. Um Ableitungen höherer Ordnung korrekt kennzeichnen zu können, schreibt man den Wert der Ableitung in Klammern als Kennzeichnung. So würde man etwa die 15. Ableitung einer Funktion f als $f^{(15)}(x)$ schreiben.

Die Ableitung beschreibt eine Kurve, die an jeder Stelle x_0 als Funktionswert die Steigung der Stammfunktion $f(x)$ beschreibt. Dies wird vor allem in der Physik angewendet (Bsp.: Weg-Zeit-Funktion, 1.Ableitung: Geschwindigkeit, 2.Ableitung: Beschleunigung). Im jenem Beispiel sieht man schon, dass es möglich ist, mehrfach hintereinander abzuleiten. Im Folgenden wird ein Blick auf Regeln zum Ableiten genommen, die die Berechnung vereinfachen.

1. Ableiten von Potenzen:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

(Achtung VEREINFACHUNGEN: $\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$, $(x^5)^2 = x^{10}$)

2. Ableiten von Funktionen mit Faktoren:

$$f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$$

3. Ableiten von Summen und Differenzen:

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

4. Ableiten von Produkten:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

5. Ableiten von Quotienten:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

6. Ableiten von Verkettungen:

$$f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Die Differentialrechnung ist immer auf eine dieser Regeln zurückzuführen. Daher sollte man sie am besten auswendig wissen. Sie bilden auch die Grundlage für die Integralrechnung, auf die im zweiten Teil dieser Zusammenfassung eingegangen wird. Zunächst aber noch einige wichtige Funktionen und ihre Ableitungen. Auch hier ist es sinnvoll, diese auswendig zu kennen:

Einige Funktionen und ihre Ableitung:

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

Integralrechnung:

Die Integralrechnung kehrt die Differentialrechnung um. Man bezeichnet die Berechnung daher auch als „aufleiten“. Die Heranführung an die Integralrechnung kann z.B. über das Ableitungsbeispiel aus der Physik passieren. Nehmen wir mal an, die folgende Kurve zeige die Geschwindigkeit eines Autos in Abhängigkeit von der Zeit:

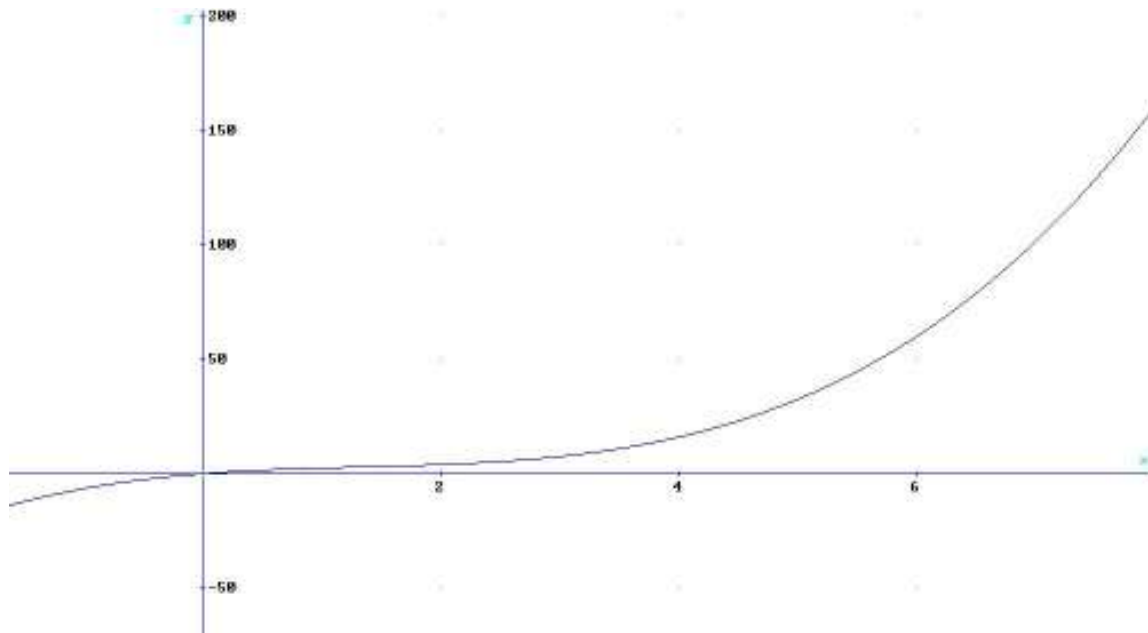


Abb.5: Geschwindigkeitskurve eines Autos

Gefragt sei nun nach der Distanz, die das Auto in den ersten 6 Sekunden zurückgelegt hat. Aus dem gegebenen Graphen kann man dies nicht ablesen. Man kann allerdings versuchen, jenes anzunähern. In bestimmten Intervallen kann man durch ein Rechteck, welches unter den Graphen gezeichnet wird, eine Näherung erstellen. Dabei geht man einfach davon aus, dass Auto hätte eine konstante Geschwindigkeit gehabt und berechnet aus Geschwindigkeit und Zeit die zurückgelegte Länge. Da der Graph aber die gesamte Zeit eine Geschwindigkeitsänderung anzeigt, ist die Näherung durch nur ein Rechteck unbrauchbar. Egal, ob man den rechten Rand als Bezug wählt („Obersumme“) oder den linken Rand („Untersumme“), mit einem einzigen Rechteck ist nicht viel zu wollen. Für dieses Beispiel sähe das folgendermaßen aus:

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - 2x^2 + 4x$$

Obersumme:

$$f(6) \cdot 6 = 60 \cdot 6 = 360m$$

Untersumme:

$$f(0) \cdot 6 = 0 \cdot 6 = 0m$$

Die einzige Aussage, die bereits gemacht werden kann, ist, dass der korrekte Wert zwischen 0 und 360 liegen wird. Um besser zu nähern, nutzt man häufig auch den Mittelwert zwischen Ober- und Untersumme. Dieser liegt meist schon wesentlich besser am korrekten Wert als die Einzelergebnisse. Um nun genauer nähern zu können, erhöht man die Anzahl der Rechtecke. An diesem Punkt kann man auch einen Bezug zur Ableitung sehen. Dort wurde ein Intervall immer kleiner und auch hier wird die Rechteckbreite nun kleiner, die Anzahl der Rechtecke wird jedoch größer.

Werden die Rechtecke unendlich klein, werden sie zu Strichen und man beschreibt die Breite als dx , was man von der Ableitung her schon kennt. Nur wird jetzt, um den Flächeninhalt zu erhalten, mit $f(x)$ multipliziert. Und genau hier kann man die Bedeutung von dx sichtbar machen. Wenn wir davon ausgehen, dass $f(x)$ eine Ableitung ist, dann können wir schreiben:

$$f'(x) \cdot dx = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} \cdot dx = dy$$

Kommen wir nun zur Bedeutung des Integralzeichens. Dieses ist aus dem Summenzeichen hergeleitet und heißt soviel wie „unendliche Summe“. Die Unendlichkeit kann durch die Rechtecke gezeigt werden, deren Anzahl gegen Unendlich geht, wenn man den Flächeninhalt genau berechnen möchte. Die Funktion, die den Flächeninhalt unter der Kurve ihrer Ableitung in Abhängigkeit von der Zeit angibt, wird Stammfunktion genannt. In unserem Beispiel wäre die Stammfunktion eine Weg-Zeit Kurve.

Kommen wir nun zunächst zu einigen Formalitäten, die beim Integral wichtig sind.

Es gibt zunächst den Unterschied zwischen dem unbestimmten Integral, das zum Aufsuchen einer Stammfunktion benutzt wird und dem bestimmten Integral, das in Grenzen berechnet wird und z.B. zur Flächenberechnung genutzt wird. Geschrieben wird das unbestimmte Integral als

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

Hierbei sind zwei Dinge wichtig, die oft falsch gemacht werden. Zum einen muss die Integrationsvariable im Integral stehen (hier: dx). Ohne diese ist nicht definiert, nach welcher Variablen integriert wird, das Integral ist also ungültig. Beim unbestimmten Integral kommt zusätzlich noch hinzu, dass man immer eine Stammfunktion sucht, das Integral aber unendlich viele Funktionen liefert. Das wird durch das $+c$, die sogenannte Integrationskonstante gekennzeichnet. Für c kann eine reelle Zahl eingesetzt werden. Erklären kann man jenes mit der Ableitung. Steht in einer Funktion ein Summand, in dem die Ableitungsvariable nicht vorkommt, fällt dieser beim Ableiten weg. Beim bestimmten Integral wird diese Variable nicht gesetzt, weil hier davon ausgegangen wird, dass der Wert entweder Null beträgt, oder der Wert für c durch die Problemstellung festgelegt wird.

Beim bestimmten Integral kommt hinzu, dass man die Berechnung durch das Aufsuchen der Stammfunktion durchführen kann. Der folgende Zusammenhang verdeutlicht dies. $F(x)$ ist hier die Stammfunktion von $f(x)$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Dieser Zusammenhang geht aus dem „Hauptsatz der Differential und Integralrechnung“ hervor.

Nach dieser kurzen Einführung werden nun beide Berechnungen noch einmal veranschaulicht. Dabei geht es mit dem bestimmten Integral und der Flächenberechnung los, im Anschluss folgt dann das unbestimmte Integral und die Berechnung von Stammfunktionen.

Graphisch veranschaulichen kann man das (bestimmte) Integral an Funktionsgraphen. Es gibt, solange der Graph der gegebenen Funktion über der x -Achse verläuft, den Wert der Fläche unter dem Graphen an. Hier dazu ein erstes Beispiel an der Funktion $f(x) = e^x$.

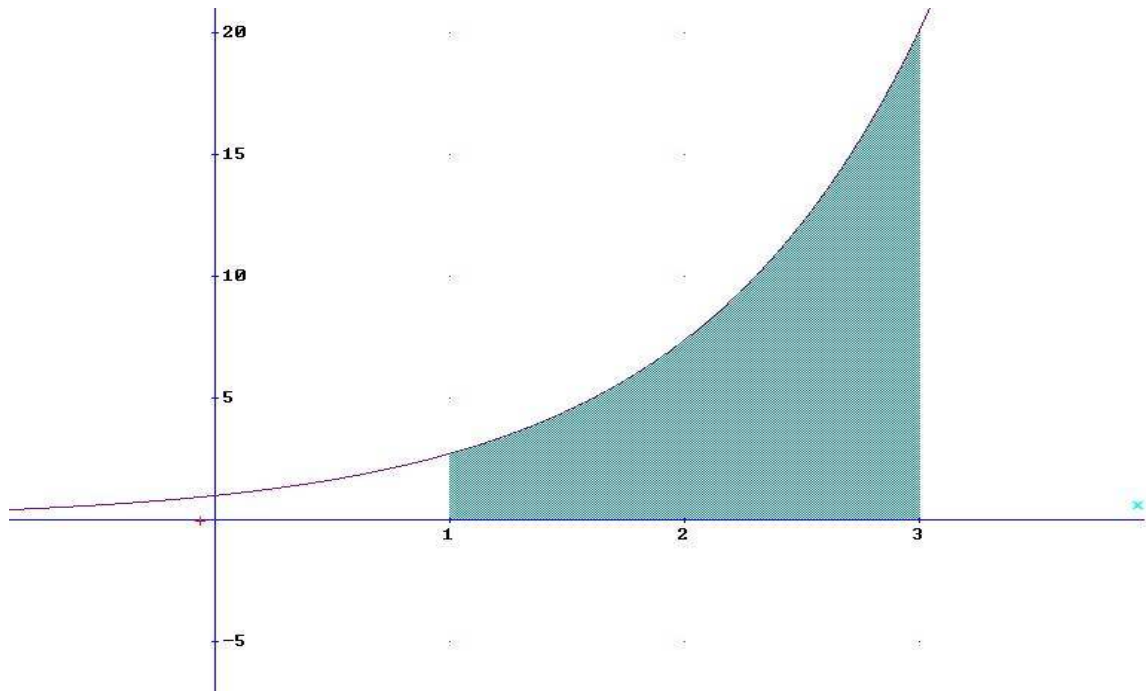


Abb. 5: Markiert ist die Fläche, deren Inhalt dem bestimmten Integral in den Grenzen von 1 bis 3 entspricht.

Es gibt natürlich auch Graphen, die durch Nullstellen auch Bereiche unterhalb der x-Achse abdecken. In diesem Fall muss die Berechnung des Integrals in Intervallen passieren, weil man sonst eine Mischung aus positiven und negativen Werten addieren würde. Für Bereiche unter der x-Achse liefert das Integral nämlich immer negative Werte, die für die Flächenberechnung umgekehrt werden müssen. Ein Beispiel hierfür sind z.B. Sinuskurven mit Störfunktion, so wie im folgenden Bild. Ohne die Störung sind bei Sinus und Kosinus alle Flächenabschnitte gleich groß, was dazu führt, dass man höchstens drei Berechnungen durchführen muss, um jedes beliebige bestimmte Integral auf diesen Kurven zu bestimmen.

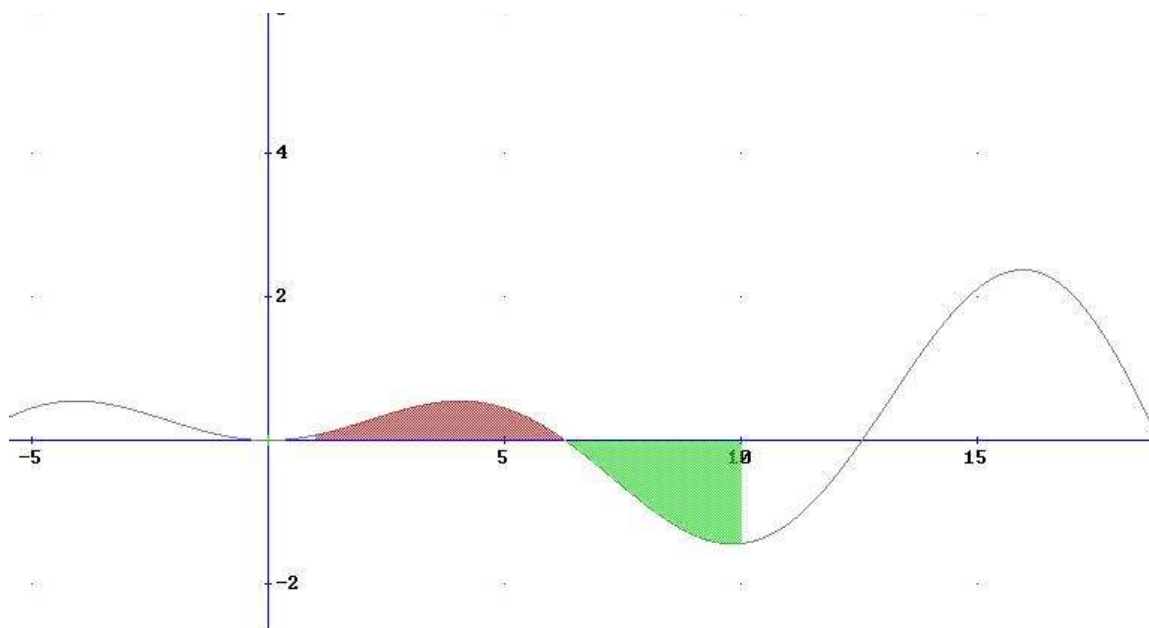


Abb. 2: Die Flächenberechnung muss in mehreren (hier sind es 2) Intervallen geschehen.

Eine Beispielrechnung soll diese Werte veranschaulichen und zeigen, wie man bei einer unbekanntem Funktion vorgeht. Als Beispiel nehmen wir die in Abb. 2 gezeigte Funktion.

$$f(x) = \sin(0,5x) \cdot 0,15x$$

Die Aufgabenstellung sei:

Berechnen Sie $\int_0^{10} f(x) dx$.

1. Schritt: Prüfen, ob auf diesem Intervall Nullstellen auftreten, die Berechnung also in Intervallen durchgeführt werden muss. Sollten hierbei keine Nullstellen gefunden werden, kann man durch einsetzen eines Wertes innerhalb der Grenzen prüfen, ob die Funktionswerte über oder unter der x-Achse verlaufen.

Für die gegebene Funktion kann man die Untersuchung durch Aufteilen der Funktion in die zwei Faktoren durchführen. Wird einer der Faktoren Null, ist der Funktionswert auch Null.

$$0,15x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\sin(0,5x) = 0 \Rightarrow x = 2\pi$$

Da Null die Randstelle des Intervalls ist, spielt sie als Nullstelle bei der Berechnung keine Rolle. Einzige Nullstelle ist $x = 2\pi$.

2. Schritt: Berechnung des Integrals/der Integrale

$$\int_0^{2\pi} \sin(0,5x) \cdot 0,15x dx = \frac{3\pi}{5} \approx 1,89$$

$$\int_{2\pi}^{10} \sin(0,5x) \cdot 0,15x dx = -3 \cdot \cos(5) + \frac{3 \cdot \sin(5)}{5} - \frac{3\pi}{5} \approx -3,31$$

3. Schritt: Umkehrung der negativen Integralwerte und Berechnung des Flächeninhaltes

$$\text{Flächeninhalt} : 1,89 + 3,31 \approx 5,2$$

Wichtig ist, dass man auf diese Dinge achtet, wenn man mit Hilfe des Integrals Flächen berechnen möchte. Kommen wir aber jetzt zur Berechnung von Stammfunktionen, die mit Hilfe des unbestimmten Integrals durchgeführt wird.

Dazu sollte man sich zunächst mit den Rechenregeln für Integrale beschäftigen, weil mit ihrer Hilfe die Berechnung wesentlich einfacher wird und auch ohne weitere Hilfsmittel durchgeführt werden kann.

Eine Tabelle mit wichtigen Integralen kann man sich mit Hilfe der Ableitungstabelle ermitteln. Allerdings gibt es die Ausnahme, dass 0 nicht zu 1 wird, wenn man integriert. Der Wert des Integrals ist in diesem Fall ebenfalls 0.

1. Integration von Potenzen

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

2. Integration von Funktionen mit Faktoren

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

3. Integration von Summen und Differenzen:

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

4. Integration von Produkten:

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

5. Integration durch Substitution:

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx = f(g(x)) + c \quad \Rightarrow \quad \int f(y) \cdot y' dx = F(y) + c = \int f(y) dy$$

Neben diesen Regeln gibt es noch das Verfahren der Partialbruchzerlegung, welches hier nicht vertieft wird, weil es eher selten zur Anwendung kommt.

Weitere Anwendungen der Integralrechnung sind Thema in Mathe II und werden deshalb ebenfalls hier nicht behandelt.