

## 4. Differentialgleichungen

### 4.1 Der Begriff der Differentialgleichung

Beispiel:

Ein Scheinwerfer wirft Licht auf eine reflektierende Fläche (Spiegel). Der Scheinwerfer befindet sich im Koordinatenursprung. Gesucht ist die Funktion  $y=f(x)$ , welche den Rand eines Spiegels beschreibt, der das einfallende Licht parallel zurückwirft.

Einfallswinkel  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{\vec{e} \cdot \vec{n}}{|\vec{e}| \cdot |\vec{n}|} \\ &= \frac{x \cdot 1 + y \cdot \left(-\frac{1}{y'}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{y'}\right)^2}} = \frac{x \cdot y' - y}{y' \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{\frac{(y')^2 + 1}{(y')^2}}} = \frac{y - x \cdot y'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(y')^2 + 1}}\end{aligned}$$

Ausfallswinkel  $\beta$ :

$$\begin{aligned}\cos(\beta) &= \frac{\vec{a} \cdot -\vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |-\vec{n}|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{y'} \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{y'} \end{pmatrix} \right|} = \frac{-\frac{1}{y'}}{1 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{(y')^2}}} = \frac{1}{y' \cdot \frac{\sqrt{(y')^2 + 1}}{\sqrt{(y')^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}\end{aligned}$$

Reflexionsgesetz:  $\alpha = \beta \Rightarrow \cos(\alpha) = \cos(\beta)$

$$\begin{aligned}\frac{y - x \cdot y'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(y')^2 + 1}} &= \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} \\ y - xy' &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ xy' &= y - \sqrt{x^2 + y^2} \\ y' &= \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x}\end{aligned}$$

Gesucht ist eine Funktion  $y=f(x)$ , sodass für alle  $x \in D(f)$  gilt:

$$f'(x) = \frac{f(x) + \sqrt{x^2 + (f(x))^2}}{x}$$

Ende des Beispiels!!

Allgemein: Gegeben ist die explizite DGL erster Ordnung.

$$\boxed{y' = F(x, y)}$$

Gesucht sind alle Funktionen  $y=f(x)$ , sodass  $f'(x) = F(x, f(x))$  für alle  $x \in D$  gilt.

In unserem Beispiel ist  $F(x, y) = \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$ .

Beispiel: freier Fall mit Reibung

Fällt ein Körper der Masse  $m$  mit der Geschwindigkeit  $v$ , so wirkt auf ihn die Reibungskraft

$$F_R = \beta \cdot v^2 \quad (\beta = \text{Proportionalitätskonstante})$$

Für das Weg-Zeit-Gesetz  $x=x(t)$  der Masse  $m$  gilt

$$m\ddot{x} = -\beta(\dot{x})^2 + mg$$

$$\boxed{m\ddot{x} + \beta(\dot{x})^2 - mg = 0}$$

Gesucht ist eine Weg-Zeit-Funktion  $x=f(t)$  mit

$$m \cdot f''(t) + \beta \cdot (f'(t))^2 - m \cdot g = 0 \quad \text{für alle } t \in D(f).$$

Es handelt sich um eine implizite DGL 2. Ordnung.

Allgemein:

$$\boxed{F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0}$$

heißt eine gewöhnliche DGL n-ter Ordnung in impliziter Form.

Beispiel: Radioaktivität

Modellvorstellung:

Im einem bestimmten Zeitintervall  $\Delta t$  hat jedes Atom dieselbe Wahrscheinlichkeit zu zerfallen.

$\Delta N$  = Anzahl der im Zeitintervall  $\Delta t$  zerfallenden Atome

$N(t)$  = Anzahl der zum Zeitpunkt  $t$  vorhandenen Atome

$$\Delta N \sim N(t) \quad \text{und} \quad \Delta N \sim \Delta t \\ \Rightarrow \Delta N \sim N(t) \cdot \Delta t$$

Mit der Proportionalitätskonstante  $\lambda > 0$  gilt

$$\Delta N = -\lambda \cdot N(t) \cdot \Delta t \\ \frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda \cdot N(t) \\ N'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda \cdot N(t)$$

Eine Lösung der DGL  $N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$  ist  $N(t) = e^{-\lambda t}$ .

Probe:

$$N'(t) = -\lambda \cdot e^{-\lambda t} = -\lambda \cdot N(t) \quad \text{für alle } t.$$

Die DGL  $N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$  besitzt die unendlich vielen Lösungen

$$\boxed{N(t) = c \cdot e^{-\lambda t}} \quad (c \in \mathbb{R})$$

Für  $t=0$  gilt  $N(0) = c \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = c$ .

Durch Vorgabe eines Wertes  $N(t_0)$  für  $t = t_0$  (Anfangsbedingung) wird aus den unendlich vielen Lösungen eine ausgewählt. Sie heißt spezielle oder partikuläre Lösung. Die Lösung  $N(t) = c \cdot e^{-\lambda t}$  heißt allgemeine Lösung mit der Integrationskonstante  $c$ .

## 4.2 Einige Lösungsmethoden für DGLn 1. Ordnung

Beispiel:  $y' = x - y + 1$

$y \setminus x$	-2	-1	0	1	2
-2	1	2	3	4	5
-1	0	1	2	3	4
0	-1	0	1	2	3
1	-2	-1	0	1	2
2	-3	-2	-1	0	1

→ Probe:  $y' = 1$   
 $x - y + 1 = x - x + 1 = 1$

Differentialgleichungen vom Typ „Trennung der Veränderlichen“

Beispiel: Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$y' = \frac{1+2x^2}{2xy^2}; \quad y(1) = 1$$

$$2y^2 y' = \frac{1+2x^2}{x} \quad \left( y' = \frac{dy}{dx} \right)$$

$$2y' dy = \frac{1+2x^2}{x} dx$$

$$\int 2y' dy = \int \frac{1+2x^2}{x} dx = \int \left( \frac{1}{x} + \frac{2x}{x} \right) dx$$

$$\frac{2}{3} y^3 = \ln(|x|) + x^2 + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$y^3 = \frac{3}{2} \cdot \ln(|x|) + \frac{3}{2} \cdot x^2 + c$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \ln(|x|) + \frac{3}{2} \cdot x^2 + c}$$

für  $y(1) = 1$

$$1 = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \ln(|1|) + \frac{3}{2} \cdot 1^2 + c}$$

$$1^3 = \frac{3}{2} + c \quad \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet:

$$1 = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \ln(|x|) + \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2}}$$

Bei Anfangswertproblemen wird nur die Umgebung des Anfangswerts betrachtet  
(hier  $y(1) = 1$ ) deswegen  $\ln(|x|) \rightarrow \ln(x)$ .

Algorithmus zur Lösung von DGLn des Typs „Trennung der Veränderlichen“

$$h(y) y' = g(x)$$
$$\int h(y) dy = \int g(x) dx$$

Sei  $H(y)$  eine Stammfunktion von  $h(y)$  und  $G(x)$  eine von  $g(x)$ . Dann gilt:

$$H(y) = G(x) + c$$

Löse, falls möglich, die Gleichung nach  $y$  auf.

Probe:

$$\frac{dy}{dx} H(y) = \frac{d}{dx} (G(x) + c)$$
$$H'(y) \cdot y' = G'(x)$$
$$h(y) \cdot y' = g(x)$$

Beispiele:

(1)

$$y' = e^{2x-3y} \quad ; \quad y(0) = \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$y' = \frac{e^{2x}}{e^{3y}}$$
$$e^{3y} \cdot y' = e^{2x}$$
$$e^{3y} \cdot \frac{dy}{dx} = e^{2x}$$
$$\int e^{3y} dy = \int e^{2x} dx$$
$$\frac{1}{3} \cdot e^{3y} = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$
$$e^{3y} = \frac{3}{2} e^{2x} + c \quad | \ln( )$$
$$3y = \ln\left(\frac{3}{2} e^{2x} + c\right)$$
$$y = \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{3}{2} e^{2x} + c\right) \quad (\text{allg. Lösung})$$

Einsetzen des Anfangswerts:

$$y(0) = \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right):$$
$$\frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{3}{2} e^{2x} + c\right)$$
$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot 1 + c \quad \Rightarrow c = 0$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet:

$$y(x) = \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{3}{2} \cdot e^{2x}\right) = \frac{1}{3} \left( \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln(e^{2x}) \right)$$
$$y(x) = \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3} \cdot x$$

(2)

$$y' = e^{x^2} \cdot \sin(y) \quad , \quad y(0) = \pi$$
$$\frac{1}{\sin(y)} \cdot y' = e^{x^2}$$
$$\int \frac{1}{\sin(y)} dy = \int e^{x^2} dx$$

Die Lösung des AWP lautet  $y(x) = \pi$

Probe:

$$y' = 0 \quad \text{und} \quad e^{x^2} \cdot \sin(y) = e^{x^2} \cdot \sin(\pi) = 0$$