

3. Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlichen

3.1 Funktionen von zwei Veränderlichen

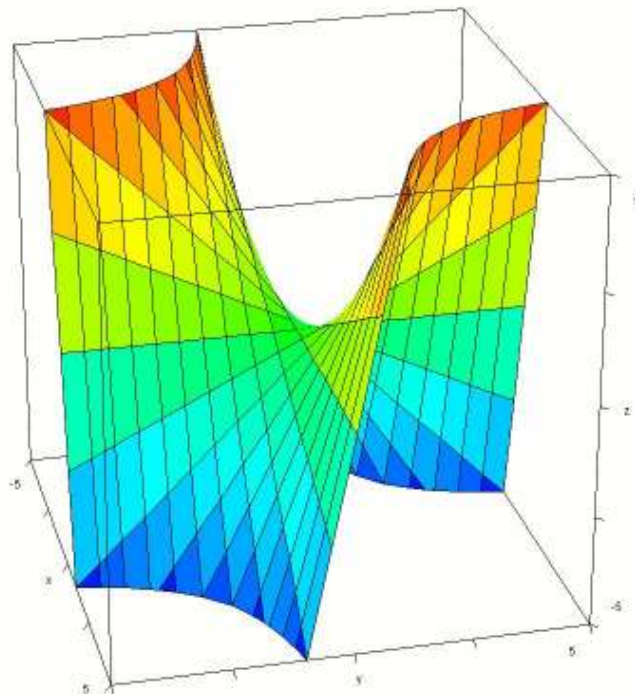
Definition:

Eine reell wertige Funktion von 2 Veränderlichen ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element (x,y) einer Teilmenge D von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eindeutig eine reelle Zahl z zuordnet.

Schreibweisen: $f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = z$

Graph von f : $G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$

Beispiel: $f(x, y) = x \cdot y$



Definition:

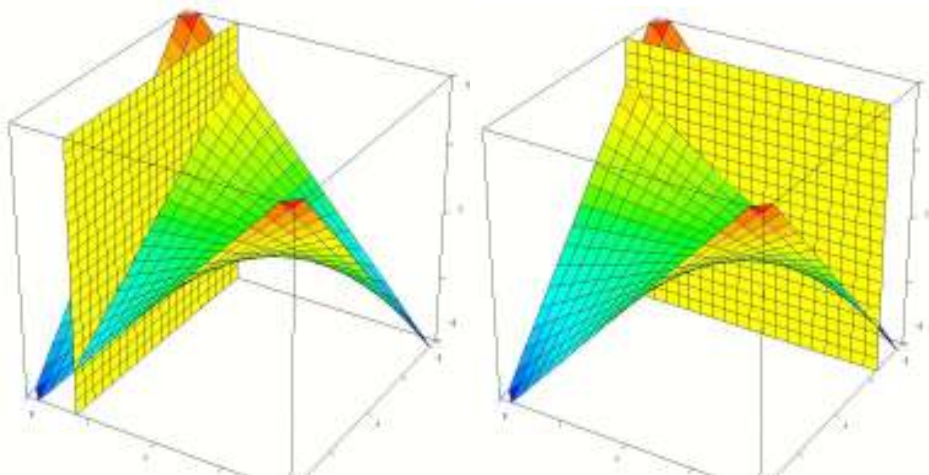
Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit 2 Veränderlichen und $(x_0, y_0) \in D$. Dann heißt die Funktion

$$\varphi\{x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in D\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) := f(x, y_0)$$

partielle Funktion von f in Richtung x durch y_0 . Und

$$\psi\{y \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in D\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(y) := f(x_0, y)$$

partielle Funktion von f in Richtung y durch x_0 .



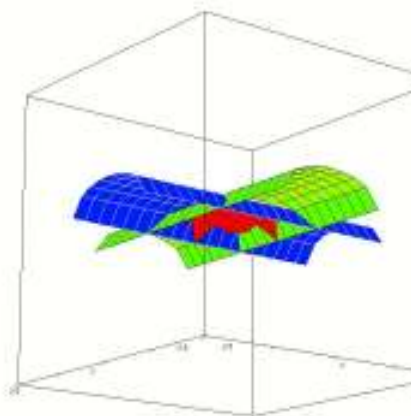
Ebenenschnitt mit den Ebenen $y = y_0$ und $x = x_0$.

Beispiele:

(1)

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Die Kugel ist in rot, die Kurve für $y_0 = 0$ grün und die Kurve für $x_0 = 0$ blau dargestellt.



$$\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2 - y_0^2} = \sqrt{(1 - y_0^2) - x^2}$$

Halbkreis mit Radius $r = \sqrt{1 - y_0^2}$

z.B.

$$y_0 = 0; \quad \varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$y_0 = \frac{1}{2}; \quad \varphi(x) = \sqrt{\frac{3}{4} - x^2}$$

$$x_0 = 0; \quad \psi(y) = \sqrt{1 - y^2}$$

(2)

$$g : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x \cdot y, \quad D = \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(x) = x \cdot y_0, \quad \psi(y) = x_0 \cdot y$$

Die Graphen von φ und ψ sind Geraden durch den Koordinatenursprung mit der Steigung y_0 bzw. x_0 .

3.2 Partielle Ableitungen

Anschauliche Bedeutung der Ableitung bei einer Funktion mit einer Veränderlichen

Steigung der Tangente:

$$f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$
$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt (x_0, y_0)

$$\boxed{y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)}$$

Anschauliche Bedeutung der Ableitung bei einer Funktion von 2 Veränderlichen

Parameterdarstellung einer Ebene:

$$\boxed{\mathcal{E} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Gleichung einer Ebene:

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad (\text{wegen } \vec{n} \perp \vec{x} - \vec{a})$$

(Zurückgeführt auf das Skalarprodukt)

$$\vec{n} \cdot \vec{x} - \vec{n} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad d := \vec{n} \cdot \vec{a}$$

$$\boxed{ax + by + cz = d}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\boxed{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} z - \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0}$$

Hesse'sche Normalform der Ebenengleichung

Entwicklung der Tangentialebene:

Die Tangentialebene an den Graphen der Funktionen $z = f(x, y)$ in Punkt (x_0, y_0) hat die Richtungsvektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \psi'(y_0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi'(x_0) \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung der Tangentialebene:

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \quad \text{mit} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi'(x_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \psi'(y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi'(x_0) \\ -\psi'(y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wenn (x, y, z) ein beliebiger Punkt der Tangentialebene ist, dann sei

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Gleichung der Tangentialebene:

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$
$$-\varphi'(x_0) \cdot x - \psi'(y_0) \cdot y + 1 \cdot z = \vec{n} \cdot \vec{a} = -\varphi'(x_0) \cdot x_0 - \psi'(y_0) \cdot y_0 + 1 \cdot z_0$$

$$\boxed{z = \varphi'(x_0) \cdot (x - x_0) + \psi'(y_0) \cdot (y - y_0) + \frac{f(x_0, y_0)}{z_0}}$$

Definition:

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion von zwei Variablen. Dann heißt f an der Stelle $(x_0, y_0) \in D$ partiell differenzierbar nach x bzw. nach y , wenn die partielle Funktion $\varphi(x)$ bzw. $\psi(y)$ in x_0 bzw. y_0 differenzierbar ist.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &:= f_x(x_0, y_0) := \varphi'(x_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &:= f_y(x_0, y_0) := \psi'(y_0) \end{aligned} \right\} \text{ partielle Ableitungen nach } x \text{ bzw. } y$$

$$\varphi(x) = f(x, y_0)$$

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx} f(x, y_0)$$

Merkregel:

Um die Funktion $f(x, y)$ partiell nach x zu differenzieren, denkt man sich y als Konstante und leitet $f(x, y)$ ausschließlich nach x mit den bekannten Differentiationsregeln ab. Entsprechendes gilt für die Ableitung nach y .

Beispiel:

(1)

$$f(x, y) = x \cdot \ln(y)$$

$$f_x(x, y) = \ln(y)$$

$$f_y(x, y) = \frac{x}{y}$$

(2)

$$g(x, y) = \sin(x + y) - \cos(2x)$$

$$g_x(x, y) = \cos(x + y) + 2 \cdot \sin(2x)$$

$$g_y(x, y) = \cos(x + y)$$

Definition:

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $(x_0, y_0) \in D$ nach x und y partiell differenzierbar. Dann heißt der Vektor

$$\begin{aligned} \nabla f(x_0, y_0) &:= \text{grad } f(x_0, y_0) \\ &= \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

der Gradient von f an der Stelle (x_0, y_0) .

Falls die partiellen Ableitungen f_x und f_y stetig in (x_0, y_0) sind, heißt

$$f'(x_0, y_0) = \text{grad } f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))^T$$

die Ableitung von f an der Stelle (x_0, y_0) .

In diesem Fall lautet die Gleichung für die Tangentialebene

$$\boxed{z = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f(x_0, y_0)}$$
$$z = f'(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + f(x_0, y_0)$$

Beispiel:

Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene an die Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ im

Punkt $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ in Hesse'scher Normalform?

$$z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$f_x(x, y) = -\frac{2x}{2 \cdot \sqrt{1 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$f_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$f_x\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{1 - \frac{3}{16} - \frac{1}{4}}} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{\frac{9}{16}}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f_y\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = -\frac{2}{3}$$

Gleichung der Tangentialebene:

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{2}{3} \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}$$

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x - \frac{2}{3} \cdot y + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2}{3}y + z + \frac{4}{3} = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{3}{9} + \frac{4}{9} + \frac{9}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z - 1 = 0$$