3. Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlichen

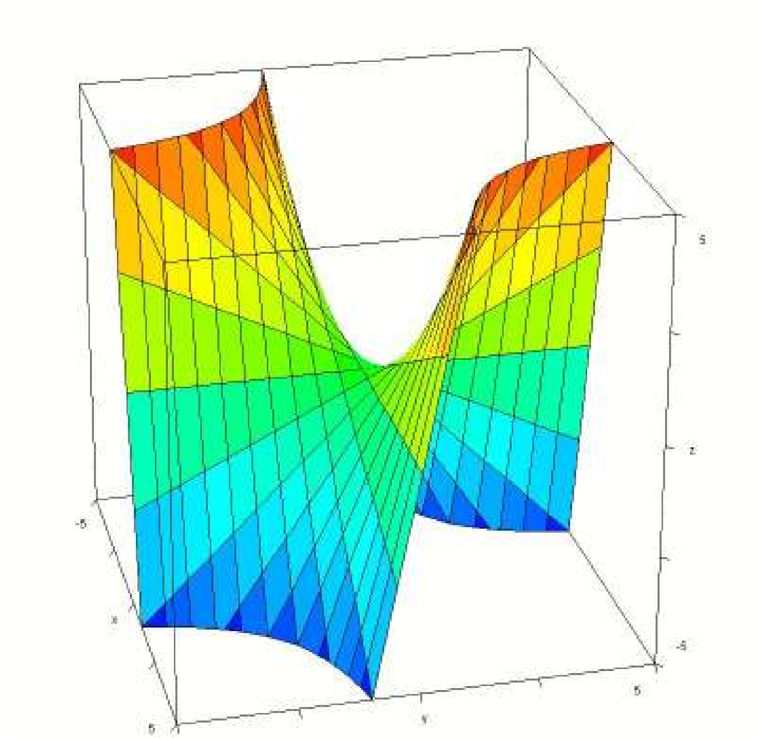
3.1 Funktionen von zwei Veränderlichen

Definition:
Eine reell wertige Funktion von 2 Veränderlichen ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element (x,y) einer Teilmenge D von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eindeutig eine reelle Zahl z zuordnet.

Schreibweisen: $f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = z$

Graph von f: $G(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$

Beispiel: $f(x,y) = x \cdot y$



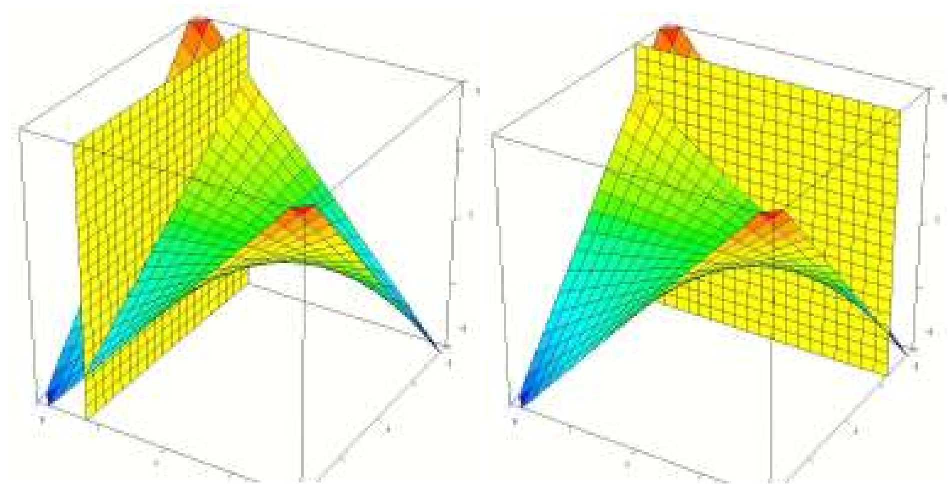
Definition:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit 2 Veränderlichen und $(x_0, y_0) \in D$. Dann heißt die Funktion

$$\varphi\{x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in D\} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := f(x, y_0)$$

partielle Funktion von f in Richtung x durch y_0. Und

$$\psi\{y \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in D\} \to \mathbb{R}, \qquad \psi(y) := f(x_0, y)$$

partielle Funktion von f in Richtung y durch x_0.



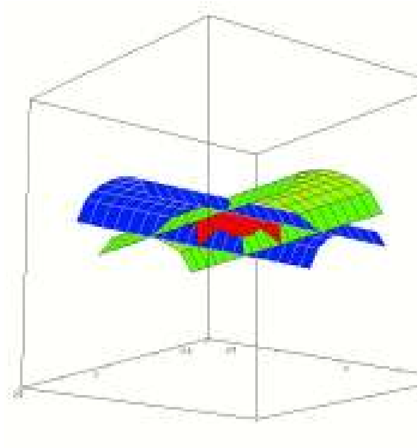
Ebenenschnitt mit den Ebenen $y = y_0$ und $x = x_0$.

Beispiele:

(1)

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1 \right\}$$

Die Kugel ist in rot, die Kurve für $y_0 = 0$ grün und die Kurve für $x_0 = 0$ blau dargestellt.



$$\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2 - {y_0}^2} = \sqrt{\left(1 - {y_0}^2\right) - x^2}$$

Halbkreis mit Radius $r = \sqrt{1 - {y_0}^2}$

z.B.

$$y_0 = 0; \ \varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$y_0 = \frac{1}{2}; \ \varphi(x) = \sqrt{\frac{3}{4} - x^2}$$

$$x_0 = 0; \ \psi(y) = \sqrt{1 - y^2}$$

(2)

$$g : D \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) = x \cdot y, \quad D = \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(x) = x \cdot y_0, \qquad \psi(y) = x_0 \cdot y$$

Die Graphen von φ und ψ sind Geraden durch den Koordinatenursprung mit der Steigung y_0 bzw. x_0.

3.2 Partielle Ableitungen

Anschauliche Bedeutung der Ableitung bei einer Funktion mit einer Veränderlichen

Steigung der Tangente:

$$f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt (x_0, y_0)

$$\boxed{y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)}$$

Anschauliche Bedeutung der Ableitung bei einer Funktion von 2 Veränderlichen

Parameterdarstellung einer Ebene:

$$\boxed{\varepsilon = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Gleichung einer Ebene:

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \qquad (wegen\ \vec{n} \perp \vec{x} - \vec{a})$$

(Zurückgeführt auf das Skalarprodukt)

$$\vec{n} \cdot \vec{x} - \vec{n} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad d := \vec{n} \cdot \vec{a}$$

$$\boxed{ax + by + cz = d}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\boxed{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} z - \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0}$$

Hesse’sche Normalform der Ebenengleichung

Entwicklung der Tangentialebene:

Die Tangentialebene an den Graphen der Funktionen $z = f(x, y)$ in Punkt (x_0, y_0) hat die Richtungsvektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \psi'(y_0) \end{pmatrix} \qquad und \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi'(x_0) \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung der Tangentialebene:

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \quad mit \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi'(x_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \psi'(y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi'(x_0) \\ -\psi'(y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wenn (x,y,z) ein beliebiger Punkt der Tangentialebene ist, dann sei

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Gleichung der Tangentialebene:

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

$$-\varphi'(x_0) \cdot x - \psi'(y_0) \cdot y + 1 \cdot z = \vec{n} \cdot \vec{a} = -\varphi'(x_0) \cdot x_0 - \psi'(y_0) \cdot y_0 + 1 \cdot z_0$$

$$\boxed{z = \varphi'(x_0) \cdot (x - x_0) + \psi'(y_0) \cdot (y - y_0) + \frac{f(x_0, y_0)}{z_0}}$$

Definition:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion von zwei Variablen. Dann heißt f an der Stelle $(x_0, y_0) \in D$ partiell differenzierbar nach x bzw. nach y, wenn die partielle Funktion $\varphi(x)$ bzw. $\psi(y)$ in x_0 bzw. y_0 differenzierbar ist.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) &:= f_x(x_0,y_0) := \varphi'(x_0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) &:= f_y(x_0,y_0) := \psi'(y_0)\end{aligned}\right\}$$ partielle Ableitungen nach x bzw. y

$$\varphi(x) = f(x, y_0)$$
$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx} f(x, y_0)$$

Merkregel:

Um die Funktion $f(x,y)$ partiell nach x zu differenzieren, denkt man sich y als Konstante und leitet $f(x,y)$ ausschließlich nach x mit den bekannten Differentiationsregeln ab. Entsprechendes gilt für die Ableitung nach y.

Beispiel:

(1)

$$f(x,y) = x \cdot \ln(y)$$
$$f_x(x,y) = \ln(y)$$
$$f_y(x,y) = \frac{x}{y}$$

(2)

$$g(x,y) = \sin(x+y) - \cos(2x)$$
$$g_x(x,y) = \cos(x+y) + 2 \cdot \sin(2x)$$
$$g_y(x,y) = \cos(x+y)$$

Definition:

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle $(x_0, y_0) \in D$ nach x und y partiell differenzierbar. Dann heißt der Vektor

$$\begin{aligned}\nabla f(x_0,y_0) &:= grad\ \ f(x_0,y_0)\\ &= \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

der Gradient von f an der Stelle (x_0, y_0).

Falls die partiellen Ableitungen f_x und f_y stetig in (x_0, y_0) sind, heißt

$$f'(x_0,y_0) = grad\ \ f(x_0,y_0) = \left(f_x(x_0,y_0),\, f_y(x_0,y_0)\right)^T$$

die Ableitung von f an der Stelle (x_0, y_0).

In diesem Fall lautet die Gleichung für die Tangentialebene

$$\boxed{z = f_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) + f(x_0, y_0)}$$

$$z = f'(x_0, y_0)\cdot\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + f(x_0, y_0)$$

Beispiel:

Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene an die Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ im Punkt $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ in Hesse'scher Normalform?

$$z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$f_x(x, y) = -\frac{2x}{2\cdot\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$f_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$f_x\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{1 - \frac{3}{16} - \frac{1}{4}}} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{\frac{9}{16}}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f_y\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = -\frac{2}{3}$$

Gleichung der Tangentialebene:

$$z=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(x-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\frac{2}{3}\cdot\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4} \qquad z=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x-\frac{2}{3}\cdot y+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2}{3}y+z+\frac{4}{3}=0 \qquad \left\|\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{2}{3}\\ 1\\ \end{pmatrix}\right\|=\sqrt{\frac{3}{9}+\frac{4}{9}+\frac{9}{9}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{4}z-1=0$$