

### 3.3 Das totale Differential

Absoluter Fehler der Eingangsgröße:  $\Delta x = x - x_0$

Absoluter Fehler der Ausgangsgröße:  $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$

$$f(x) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &\approx f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) - f(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot \Delta x\end{aligned}$$

$$df := f'(x) \cdot \Delta x$$

heißt das totale Differential von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

z.B.

$$f(x) = x$$

$$df = f'(x_0) \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

$$\boxed{dx := \Delta x}$$

Das totale Differential einer an der Stelle  $x_0$  differenzierbaren Funktion  $y = f(x)$  ist also

$$\boxed{df = f'(x_0) \cdot dx}$$

$$\boxed{\Delta f \approx df}$$

Gegeben sei eine Funktion  $z = f(x, y)$ , die an der Stelle  $(x_0, y_0)$  stetige partielle Ableitungen besitzt.

Gemessener Wert:  $(x_0, y_0)$

Exakter Wert:  $(x, y)$

absoluter Fehler der Eingangsgrößen:  $\Delta x = x - x_0$  ;  $\Delta y = y - y_0$

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x, y) - f(x_0, y_0) \\ &\approx f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) \\ &= f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y\end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen  $dx = \Delta x$  ;  $dy = \Delta y$  heißt

$$dz = df = f_x(x_0, y_0) \cdot dx + f_y(x_0, y_0) \cdot dy$$

das totale Differential der Funktion  $z = f(x, y)$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ .

$\Delta z$  ist der Unterschied, den man erhält, wenn man vom Punkt  $(x_0, y_0)$  auf dem Graphen der Funktion  $z = f(x, y)$  zum Punkt  $(x, y)$  geht.

$dz$  ist der Unterschied, den man erhält, wenn man vom Punkt  $(x_0, y_0)$  auf der Tangentialebene zum Punkt  $(x, y)$  geht.

$$\begin{aligned} dz &= \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\text{grad } f(x_0, y_0) \cdot d\vec{x}} \\ d\vec{x} &:= \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiele:

(1) Zylindervolumen  $V = \pi r^2 h$

abs. Fehler:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(r, h) - V(r_0, h_0) = \pi r^2 h - \pi r_0^2 h_0 \\ &= \pi \cdot (r_0 + \Delta r)^2 \cdot (h_0 + \Delta h) - \pi r_0^2 h_0 \\ &= \pi \cdot (r_0^2 + 2r_0 \Delta r + \Delta r^2) \cdot (h_0 + \Delta h) - \pi r_0^2 h_0 \\ &= \pi \cdot (r_0^2 h_0 + 2r_0 h_0 \Delta r + h_0 \Delta r^2 + r_0^2 \Delta h + 2r_0 \Delta r \Delta h + \Delta r^2 \Delta h - r_0^2 h_0) \\ &= \pi \cdot (2r_0 h_0 \Delta r + h_0 \Delta r^2 + r_0^2 \Delta h + 2r_0 \Delta r \Delta h + \Delta r^2 \Delta h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial r}(r_0, h_0) \cdot \Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}(r_0, h_0) \cdot \Delta h \\ dV &= 2\pi r_0 \cdot h_0 \cdot \Delta r + \pi r_0^2 \cdot \Delta h \\ &= \pi \cdot (r_0^2 \cdot \Delta h + 2r_0 h_0 \cdot \Delta r) \end{aligned}$$

$\Delta V \approx dV$  bedeutet Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

(2) Parallelschaltung von zwei Widerständen

$$R_1 = 10 \pm 0,1 \Omega \quad R_2 = 5 \pm 0,02 \Omega$$

Gesamtwiderstand:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Aufgabe: Schätzen Sie den prozentualen Fehler des Gesamtwiderstands ab.

$$f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x + y}; \quad (x_0, y_0) = (10, 5); \quad \Delta x = 0,1; \quad \Delta y = 0,02$$

$$\Delta f \approx df = f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{y_0 \cdot (x_0 + y_0) - (x_0 \cdot y_0) \cdot 1}{(x_0 + y_0)^2} = \frac{x_0 \cdot y_0 + y_0^2 - x_0 \cdot y_0}{(x_0 + y_0)^2} = \frac{y_0^2}{(x_0 + y_0)^2}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{x_0^2}{(x_0 + y_0)^2}$$

$$\Delta f \approx \frac{5^2}{15^2} \cdot 0,1 + \frac{10^2}{15^2} \cdot 0,02 = \frac{0,1}{9} + \frac{0,08}{9} = \frac{0,18}{9} = 0,02$$

Der absolute Fehler des Gesamtwiderstands beträgt ungefähr  $\Delta R = 0,02$ .

Relativer Fehler:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\frac{1}{50}}{\frac{10}{3}} = \frac{1}{50} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{500} = 0,006$$

Prozentualer Fehler: 0,6 %

(3)

Wegen  $\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot y) = y$  und  $\frac{\partial}{\partial y}(x \cdot y) = x$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(x \cdot y)}{(x \cdot y)} &\approx \frac{d(x \cdot y)}{(x \cdot y)} = \left( \frac{\partial(x \cdot y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial(x \cdot y)}{\partial y} \cdot \Delta y \right) \cdot \frac{1}{x \cdot y} \\ &\approx \frac{y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y}{x \cdot y} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \end{aligned}$$

Der relative Fehler eines Produkts ist näherungsweise die Summe der relativen Fehler der Faktoren.

(4) Wegen  $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}$  und  $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}$  gilt

$$\frac{\Delta\left(\frac{x}{y}\right)}{\frac{x}{y}} = \frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{\frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{y} \cdot \Delta x - \frac{x}{y^2} \cdot \Delta y}{\frac{x}{y}} = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}$$

Der relative Fehler eines Quotienten ist ungefähr die Differenz aus dem relativen Fehler des Zählers und dem relativen Fehler des Nenners.

(5) Für konservative Kraftfelder gilt:

$$d E_{pot} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \text{grad } E_{pot}$$

### 3.4 Funktionen von drei Veränderlichen

$$w = f(x, y, z)$$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = f_z(x, y, z)$  bedeutet: Leite nach z ab und betrachte x und y dabei als Konstante.

z.B.

$$f(x, y, z) = \sin(x + y \cdot z^2)$$

$$f_z(x, y, z) = \cos(x + y \cdot z^2) \cdot 2yz$$

Hinreichendes Kriterium für Extrema:

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion von drei Veränderlichen.

Voraussetzungen:

- $(x_0, y_0, z_0)$  sei ein innerer Punkt von D
- $f_x(x_0, y_0, z_0) = 0$  und  $f_y(x_0, y_0, z_0) = 0$  und  $f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$
- die zweiten partiellen Ableitungen von f an der Stelle  $(x_0, y_0, z_0)$  existieren und sind stetig

Behauptung:

- f hat an der Stelle  $(x_0, y_0, z_0)$  ein relatives Minimum, wenn dort

$$f_{xx}(x_0, y_0, z_0) > 0 \text{ und } \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, z_0) & f_{xy}(x_0, y_0, z_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0, z_0) & f_{yy}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} > 0$$

$$\text{und } \det H f(x_0, y_0, z_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, z_0) & f_{xy}(x_0, y_0, z_0) & f_{xz}(x_0, y_0, z_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0, z_0) & f_{yy}(x_0, y_0, z_0) & f_{yz}(x_0, y_0, z_0) \\ f_{xz}(x_0, y_0, z_0) & f_{yz}(x_0, y_0, z_0) & f_{zz}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} > 0$$

Anm.: Nach dem Satz von Schwarz müssen nur 6 statt 9 zweite partielle Ableitungen bestimmt werden.

-  $f$  hat an der Stelle  $(x_0, y_0, z_0)$  ein relatives Maximum, wenn dort

$$f_{xx}(x_0, y_0, z_0) < 0 \text{ und } \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, z_0) & f_{xy}(x_0, y_0, z_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0, z_0) & f_{yy}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} > 0$$

$$\text{und } \det H f(x_0, y_0, z_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, z_0) & f_{xy}(x_0, y_0, z_0) & f_{xz}(x_0, y_0, z_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0, z_0) & f_{yy}(x_0, y_0, z_0) & f_{yz}(x_0, y_0, z_0) \\ f_{xz}(x_0, y_0, z_0) & f_{yz}(x_0, y_0, z_0) & f_{zz}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} < 0$$

Abstände zwischen zwei Punkten einer Funktion mit drei Veränderlichen:

Der Abstand ist die Länge des Verbindungsvektors der beiden Punkte.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$