3.3 Das totale Differential

Absoluter Fehler der Eingangsgröße: $\Delta x = x - x_0$

Absoluter Fehler der Ausgangsgröße: $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$

$$f(x) \approx f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &\approx f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0) - f(x_0)\\ &= f'(x_0)\cdot \Delta x\end{aligned}$$

$$df := f'(x)\cdot \Delta x$$

heißt das totale Differential von f an der Stelle x_0.

z.B.

$$\begin{aligned}&f(x) = x\\ &df = f'(x_0)\cdot \Delta x = 1\cdot \Delta x = \Delta x\\ &\boxed{dx := \Delta x}\end{aligned}$$

Das totale Differential einer an der Stelle x_0 differenzierbaren Funktion $y = f(x)$ ist also

$$\boxed{df = f'(x_0)\cdot dx}$$

$$\boxed{\Delta f \approx df}$$

Gegeben sei eine Funktion $z = f(x, y)$, die an der Stelle (x_0, y_0) stetige partielle Ableitungen besitzt.

Gemessener Wert: (x_0, y_0)

Exakter Wert: (x, y)

absoluter Fehler der Eingangsgrößen: $\Delta x = x - x_0$; $\Delta y = y - y_0$

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x, y) - f(x_0, y_0)\\ &\approx f_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) + f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)\\ &= f_x(x_0, y_0)\cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0)\cdot \Delta y\end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen $dx = \Delta x$; $dy = \Delta y$ heißt

$$dz = df = f_x(x_0, y_0)\cdot dx + f_y(x_0, y_0)\cdot dy$$

das totale Differential der Funktion $z = f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0).

Δz ist der Unterschied, den man erhält, wenn man vom Punkt (x_0, y_0) auf dem Graphen der Funktion $z = f(x, y)$ zum Punkt (x, y) geht.

dz ist der Unterschied, den man erhält, wenn man vom Punkt (x_0, y_0) auf der Tangentialebene zum Punkt (x, y) geht.

$$dz = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$
$$= \boxed{grad\ f(x_0, y_0) \cdot d\vec{x}}$$
$$d\vec{x} := \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

Beispiele:

(1) Zylindervolumen $\quad V = \pi r^2 h$

abs. Fehler:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(r,h) - V(r_0, h_0) = \pi r^2 h - \pi r_0^2 h_0 \\ &= \pi \cdot (r_0 + \Delta r)^2 \cdot (h_0 + \Delta h) - \pi r_0^2 h_0 \\ &= \pi \cdot \left(r_0^2 + 2r_0 \Delta r + \Delta r^2\right) \cdot (h_0 + \Delta h) - \pi r_0^2 h_0 \\ &= \pi \cdot \left(r_0^2 h_0 + 2r_0 h_0 \Delta r + h_0 \Delta r^2 + r_0^2 \Delta h + 2r_0 \Delta r \Delta h + \Delta r^2 \Delta h - r_0^2 h_0\right) \\ &= \pi \cdot \left(2r_0 h_0 \Delta r + h_0 \Delta r^2 + r_0^2 \Delta h + 2r_0 \Delta r \Delta h + \Delta r^2 \Delta h\right) \end{aligned}$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}(r_0, h_0) \cdot \Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}(r_0, h_0) \cdot \Delta h$$
$$\begin{aligned} dV &= 2\pi r_0 \cdot h_0 \cdot \Delta r + \pi r_0^2 \cdot \Delta h \\ &= \pi \cdot \left(r_0^2 \cdot \Delta h + 2r_0 h_0 \cdot \Delta r\right) \end{aligned}$$

$\Delta V \approx dV$ bedeutet Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

(2) Parallelschaltung von zwei Wiederständen

$R_1 = 10 \pm 0{,}1\Omega \qquad R_2 = 5 \pm 0{,}02\,\Omega$

Gesamtwiederstand:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Aufgabe: Schätzen Sie den prozentualen Fehler des Gesamtwiderstands ab.

$$f(x,y)=\frac{x\cdot y}{x+y};\quad (x_0,y_0)=(10,5);\quad \Delta x=0{,}1;\quad \Delta y=0{,}02$$

$$\Delta f\approx df=f_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y$$

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{y_0\cdot(x_0+y_0)-(x_0\cdot y_0)\cdot 1}{(x_0+y_0)^2}=\frac{x_0\cdot y_0+{y_0}^2-x_0\cdot y_0}{(x_0+y_0)^2}=\frac{{y_0}^2}{(x_0+y_0)^2}$$

$$f_y(x_0,y_0)=\frac{{x_0}^2}{(x_0+y_0)^2}$$

$$\Delta f\approx\frac{5^2}{15^2}\cdot 0{,}1+\frac{10^2}{15^2}\cdot 0{,}02=\frac{0{,}1}{9}+\frac{0{,}08}{9}=\frac{0{,}18}{9}=0{,}02$$

Der absolute Fehler des Gesamtwiderstands beträgt ungefähr $\Delta R=0{,}02$.

Relativer Fehler:

$$\frac{\Delta R}{R}=\frac{\frac{1}{50}}{\frac{10}{3}}=\frac{1}{50}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{500}=0{,}006$$

Prozentualer Fehler: 0,6 %

(3)

Wegen $\frac{\partial}{\partial x}(x\cdot y)=y$ und $\frac{\partial}{\partial y}(x\cdot y)=x$ gilt

$$\frac{\Delta(x\cdot y)}{(x\cdot y)}\approx\frac{d(x\cdot y)}{(x\cdot y)}=\left(\frac{\partial(x\cdot y)}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial(x\cdot y)}{\partial y}\cdot\Delta y\right)\cdot\frac{1}{x\cdot y}$$
$$\approx\frac{y\cdot\Delta x+x\cdot\Delta y}{x\cdot y}=\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}$$

Der relative Fehler eines Produkts ist näherungsweise die Summe der relativen Fehler der Faktoren.

(4) Wegen $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{y}$ und $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{x}{y^2}$ gilt

$$\frac{\Delta\left(\frac{x}{y}\right)}{\frac{x}{y}}=\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{\frac{x}{y}}=\frac{\frac{1}{y}\cdot\Delta x-\frac{x}{y^2}\cdot\Delta y}{\frac{x}{y}}=\frac{\Delta x}{x}-\frac{\Delta y}{y}$$

Der relative Fehler eines Quotienten ist ungefähr die Differenz aus dem relativen Fehler des Zählers und dem relativen Fehler des Nenners.

(5) Für konservative Kraftfelder gilt:

$$d\,E_{pot} = \vec{F}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}$$
$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = grad\,E_{pot}$$

3.4 Funktionen von drei Veränderlichen

$$w = f\left(x, y, z\right)$$

$\frac{\partial f}{\partial z}\left(x, y, z\right) = f_z\left(x, y, z\right)$ bedeutet: Leite nach z ab und betrachte x und y dabei als Konstante.

z.B.

$$f\left(x, y, z\right) = \sin\left(x + y\cdot z^2\right)$$
$$f_z\left(x, y, z\right) = \cos\left(x + y\cdot z^2\right)\cdot 2yz$$

Hinreichendes Kriterium für Extrema:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion von drei Veränderlichen.

Voraussetzungen:

- $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ sei ein innerer Punkt von D
- $f_x\left(x_0, y_0, z_0\right) = 0$ und $f_y\left(x_0, y_0, z_0\right) = 0$ und $f_z\left(x_0, y_0, z_0\right) = 0$
- die zweiten partiellen Ableitungen von f an der Stelle $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ existieren und sind stetig

Behauptung:

- f hat an der Stelle $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ ein relatives Minimum, wenn dort

  $f_{xx}\left(x_0, y_0, z_0\right) > 0$ und $\begin{vmatrix} f_{xx}\left(x_0, y_0, z_0\right) & f_{xy}\left(x_0, y_0, z_0\right) \\ f_{xy}\left(x_0, y_0, z_0\right) & f_{yy}\left(x_0, y_0, z_0\right) \end{vmatrix} > 0$

  und $\det H\ f\left(x_0, y_0, z_0\right) = \begin{vmatrix} f_{xx}\left(x_0, y_0, z_0\right) & f_{xy}\left(x_0, y_0, z_0\right) & f_{xz}\left(x_0, y_0, z_0\right) \\ f_{xy}\left(x_0, y_0, z_0\right) & f_{yy}\left(x_0, y_0, z_0\right) & f_{yz}\left(x_0, y_0, z_0\right) \\ f_{xz}\left(x_0, y_0, z_0\right) & f_{yz}\left(x_0, y_0, z_0\right) & f_{zz}\left(x_0, y_0, z_0\right) \end{vmatrix} > 0$

Anm.: Nach dem Satz von Schwarz müssen nur 6 statt 9 zweite partielle Ableitungen bestimmt werden.

- f hat an der Stelle $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ ein relatives Maximum, wenn dort

$$f_{xx}\left(x_0, y_0, z_0\right) < 0 \text{ und } \begin{vmatrix} f_{xx}\left(x_0, y_0, z_0\right) & f_{xy}\left(x_0, y_0, z_0\right) \\ f_{xy}\left(x_0, y_0, z_0\right) & f_{yy}\left(x_0, y_0, z_0\right) \end{vmatrix} > 0$$

$$\text{und } \det\ H\ f\left(x_0, y_0, z_0\right) = \begin{vmatrix} f_{xx}\left(x_0, y_0, z_0\right) & f_{xy}\left(x_0, y_0, z_0\right) & f_{xz}\left(x_0, y_0, z_0\right) \\ f_{xy}\left(x_0, y_0, z_0\right) & f_{yy}\left(x_0, y_0, z_0\right) & f_{yz}\left(x_0, y_0, z_0\right) \\ f_{xz}\left(x_0, y_0, z_0\right) & f_{yz}\left(x_0, y_0, z_0\right) & f_{zz}\left(x_0, y_0, z_0\right) \end{vmatrix} < 0$$

Abstände zwischen zwei Punkten einer Funktion mit drei Veränderlichen:

Der Abstand ist die Länge des Verbindungsvektors der beiden Punkte.

$$d = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$$