

Definition:

Eine Funktion $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine reelle Zahlenfolge, d.h. jeder natürlichen Zahl n wird eine reelle Zahl $a(n)$ zugeordnet.

$$a_n := a(n)$$

a_n heißt das allgemeine Glied der Folge $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} := a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Beispiele:

(1)

n	1	2	3	4	5
a_n	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots\right)$$

(2)

$$\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$$

$$\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}_0} = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$$

(3)

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$s_1 = 1, s_2 = 1 + \frac{1}{4}, s_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}, s_4 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Definition:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine reelle Zahlenfolge, dann heißt die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$s_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1, s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \dots, s_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

unendliche Reihe. Die unendliche Reihe heißt konvergent zur Summe s , wenn der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{existiert.}$$

Beispiele:

(1)

$$a_n = q^n$$

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^n$$

Falls $|q| < 1$, ist die geometrische Reihe s_n konvergent zur Summe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

(2)

$$\left(\frac{1}{n \cdot (n+1)} \right)_{n \in \mathbb{N}}, s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot (k+1)}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1$$

(3) harmonische Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

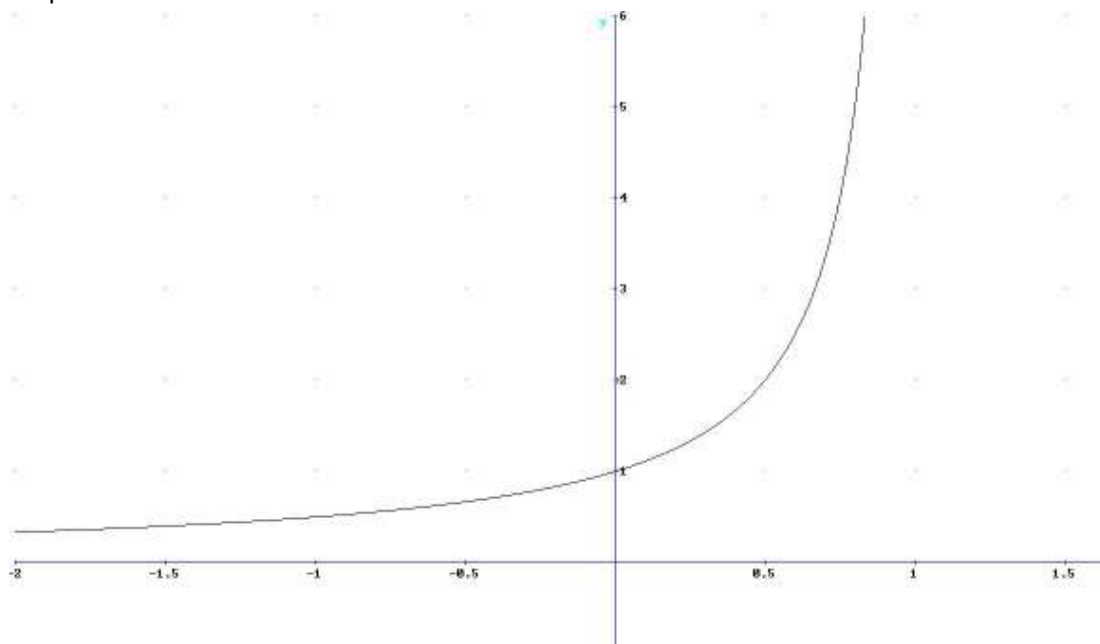
2.2 Funktionenreihen

Beispiel:

$$f :]-1,1[\rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
f(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{3}$	4

Graph von f:

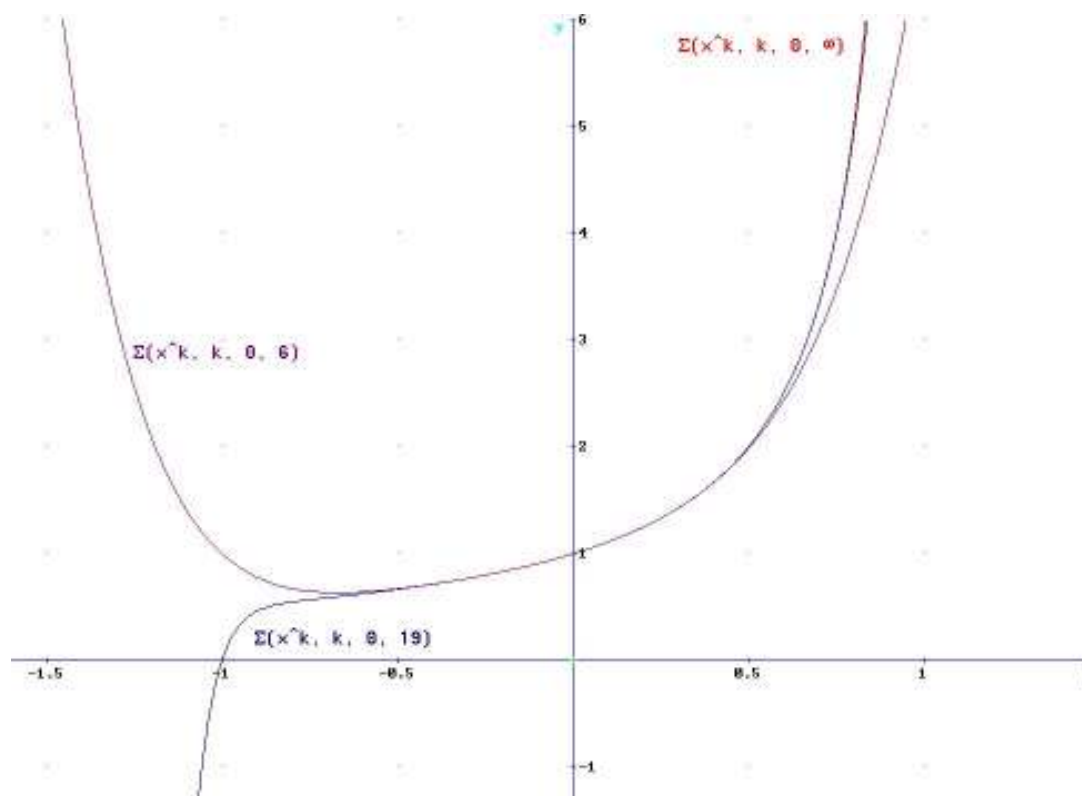


$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^6 x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

$$= \frac{1-x^7}{1-x}$$

Verschiedene Annäherungen an die Funktionsreihe:



WICHTIG:

Die Summanden werden als Funktionen aufgefasst!

Definition:

Unter einer Potenzreihe mit der Entwicklungsmitte x_0 versteht man die Funktionenreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

wobei (a_k) eine reelle Zahlenfolge sei.

Entwicklungsmitte $x_0 = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + \dots + a_n \cdot x^n + \dots$$

Entwicklung einer Funktion $f(x)$ in eine Potenzreihe:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + \dots + a_n \cdot x^n + \dots$$

$$f(0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 4 \cdot a_4 \cdot x^3 + \dots$$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot x + 12 \cdot a_4 \cdot x^2 + \dots$$

$$f''(0) = 2 \cdot a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

$$f'''(x) = 6 \cdot a_3 + \dots$$

$$f'''(0) = 6 \cdot a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(0)}{6}$$

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Definition:

Sei f eine unendlich oft differenzierbare Funktion. Dann heißt die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \dots$$

die Taylor-Reihe von f mit der Entwicklungsmittelpunkt 0.

Beispiel:

(1)

$$f(x) = e^x \rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \quad f^{(n)}(0) = 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2,716$$

(2) Freier Fall mit Luftreibung

Ansatz für den Luftwiderstand: $F = F(v)$

$$F(v) = F(0) + F'(0) \cdot v + \frac{F''(0)}{2} \cdot v^2 + \dots$$

$$\approx \frac{F''(0)}{2} \cdot v^2$$

$$F(v) \sim v^2$$

Definition:

Sei f_k und für jedes x sei die Funktion f_k definiert. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad , x \in D$$

die Funktionsreihe der Funktion f_k .

Die Menge $\left\{ x \in D \mid \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \text{ ist konvergent} \right\}$ heißt das Konvergenzgebiet der Funktionsreihe.

Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2x-1}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$f(x) = -\frac{1}{1-2x} = -\frac{1}{1-q} \quad \text{mit } q = 2x$$

$$f(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} q^k = -\sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = -\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x^k$$

$$f(0) = -1, \quad -\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x^k = -2^0 = -1$$

$$\text{Konvergenzgebiet } \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \mid |2x| < 1 \right\} = \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$$

(zurückgeführt auf die geometrische Reihe, daher können die Konvergenzeigenschaften mit ihrer Hilfe bestimmt werden)