Definition:

Eine Funktion $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ heißt eine reelle Zahlenfolge, d.h. jeder natürlichen Zahl n wird eine reelle Zahl a(n) zugeordnet.

$$a_n := a(n)$$

a_n heißt das allgemeine Glied der Folge $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$$

Beispiele:

(1)

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

n	1	2	3	4	5
a_n	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to \left(1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25},\ldots\right)$$

(2)

$$\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = (-1,1,-1,1,-1,\ldots)$$
$$\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} = (1,-1,1,-1,1,\ldots)$$

(3)

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$s_1 = 1, s_2 = 1+\frac{1}{4}, s_3 = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}, s_4 = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}$$
$$s_n = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

Definition:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle Zahlenfolge, dann heißt die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$s_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1, s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ldots, s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

unendliche Reihe. Die unendliche Reihe heißt konvergent zur Summe s, wenn der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \text{existiert.}$$

Beispiele:

(1)

$$a_n = q^n$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^n$$

Falls $|q| < 1$, ist die geometrische Reihe s_n konvergent zur Summe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

(2)

$$\left(\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot(k+1)}$$

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot(k+1)} = 1$$

(3) harmonische Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} \\
&= 1 + n\cdot\frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \infty$$

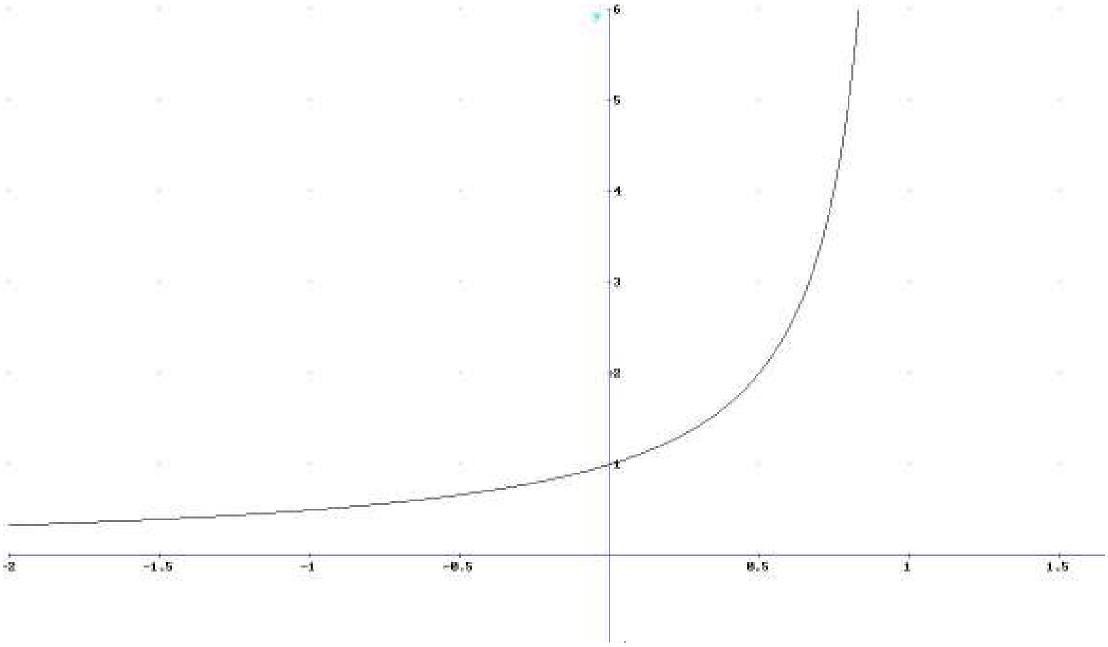
2.2 Funktionenreihen

Beispiel:

$$f:]-1,1[\to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
f(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{3}$	4

Graph von f:

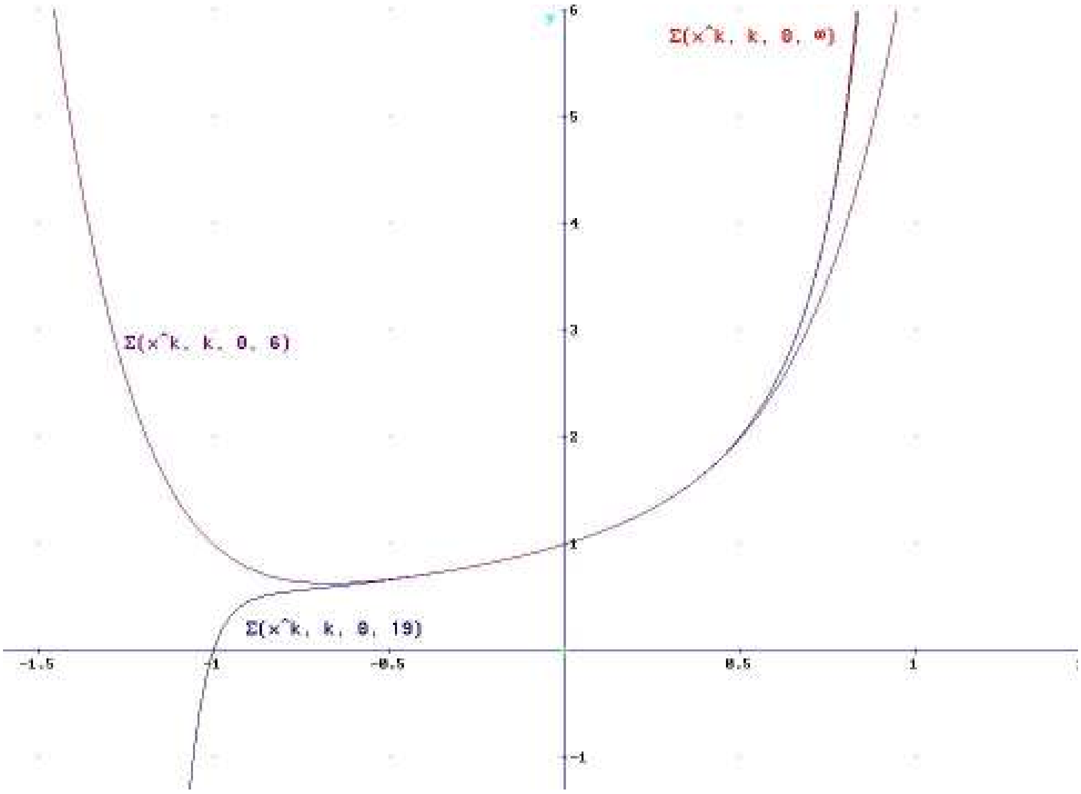


$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{6} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

$$= \frac{1-x^7}{1-x}$$

Verschiedene Annäherungen an die Funktionsreihe:



WICHTIG:
Die Summanden werden als Funktionen aufgefasst!

Definition:
Unter einer Potenzreihe mit der Entwicklungsmitte x_0 versteht man die Funktionenreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

wobei (a_k) eine reelle Zahlenfolge sei.

Entwicklungsmitte $x_0 = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + \ldots + a_n \cdot x^n + \ldots$$

Entwicklung einer Funktion f(x) in eine Potenzreihe:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cdot x^k = a_0 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2 + a_3\cdot x^3 + a_4\cdot x^4 + \ldots + a_n\cdot x^n + \ldots$$

$$f(0)=a_0$$

$$f'(x)=a_1+2\cdot a_2\cdot x+3\cdot a_3\cdot x^2+4\cdot a_4\cdot x^3+\ldots$$

$$f'(0)=a_1$$

$$f''(x)=2\cdot a_2+6\cdot a_3\cdot x+12\cdot a_4\cdot x^2+\ldots$$

$$f''(0)=2\cdot a_2 \Rightarrow a_2=\frac{f''(0)}{2}$$

$$f'''(x)=6\cdot a_3+\ldots$$

$$f'''(0)=6\cdot a_3 \Rightarrow a_2=\frac{f'''(0)}{6}$$

$$f^{(n)}(0)=n!\cdot a_n \Rightarrow a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Definition:
Sei f eine unendlich oft differenzierbare Funktion. Dann heißt die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k = f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2}\cdot x^2+\ldots$$

die Taylor-Reihe von f mit der Entwicklungsmitte 0.

Beispiel:

(1)

$$f(x)=e^x \rightarrow f^{(n)}(x)=e^x \qquad f^{(n)}(0)=1$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot x^k = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\ldots$$

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}=2{,}71\overline{6}$$

(2) Freier Fall mit Luftreibung

Ansatz für den Luftwiderstand: F = F(v)

$$F(v)=F(0)+F'(0)\cdot v+\frac{F''(0)}{2}\cdot v^2+\ldots$$

$$\approx \frac{F''(0)}{2}\cdot v^2$$

$$F(v)\sim v^2$$

Definition:
Sei und für jedes sei die Funktion definiert. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad , x \in D$$

die Funktionsreihe der Funktion f_k.

Die Menge $\left\{ x \in D \mid \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \text{ } ist\ konvergent \right\}$ heißt das Konvergenzgebiet der Funktionsreihe.

Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{2x-1}, \qquad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$f(x) = -\frac{1}{1-2x} = -\frac{1}{1-q} \quad mit \quad q = 2x$$

$$f(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} q^k = -\sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = -\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x^k$$

$$f(0) = -1, \quad -\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x^k = -2^0 = -1$$

Konvergenzgebiet $\left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \middle| \, |2x| < 1 \right\} = \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$

(zurückgeführt auf die geometrische Reihe, daher können die Konvergenzeigenschaften mit ihrer Hilfe bestimmt werden)