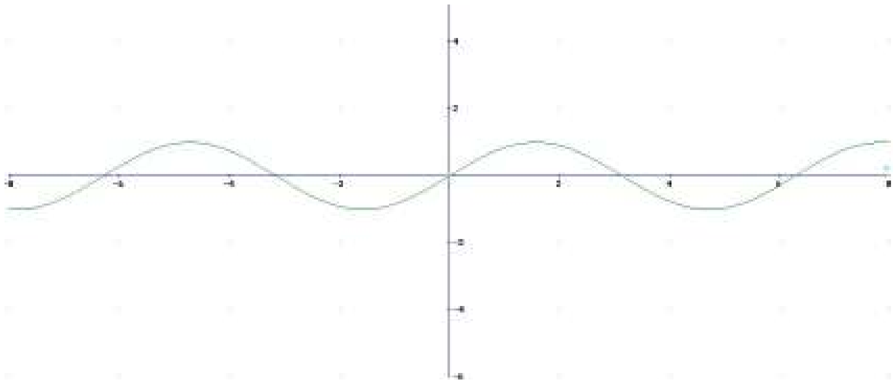
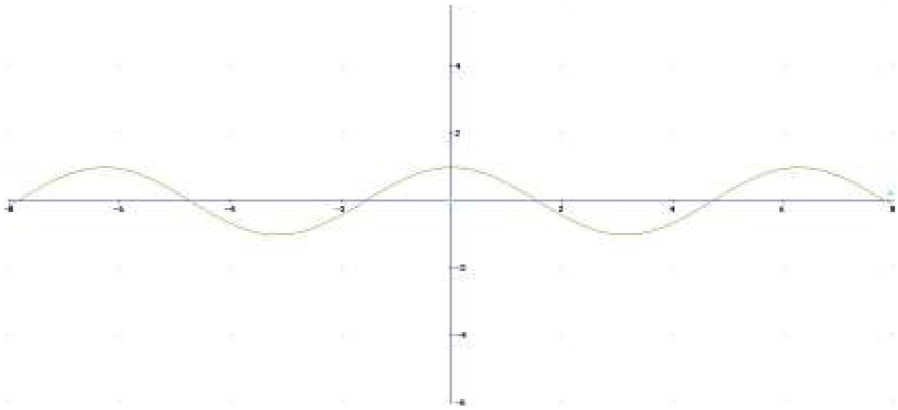
2.3 Periodische Funktionen

Beispiele:

Die Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ haben die Periode 2π .



$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.



harmonische Schwingung:

$$f(x) = A \cdot \sin(\omega x + \varphi)$$

A = Amplitude

ϖ = Kreisfrequenz

φ = Phasenverschiebung

Periodenbestimmung:

$$f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = A \cdot \sin\left(\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right) = A \cdot \sin(\omega x + 2\pi + \varphi)$$

$$= A \cdot \sin(\omega x + \varphi) = f(x)$$

Eine harmonische Schwingung hat die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Definition:
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt periodisch mit der Periode T > 0, wenn

$$f(x+T) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Satz:
Wenn $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodische Funktionen mit der Periode T sind, dann hat auch die Linearkombination

$$f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_n f_n(x)$$

die Periode T.

2.4 Trigonometrische Polynome und Fourier-Reihen

$$\begin{aligned} A \cdot \sin(\omega x + \varphi) &= A \cdot \left(\sin(\omega x) \cdot \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot \cos(\omega x)\right) \\ &= a \cdot \cos(\omega x) + b \cdot \sin(\omega x) \qquad \left[a = A \cdot \sin(\varphi), b = A \cdot \cos(\varphi)\right] \end{aligned}$$

Additionstheorem:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

Beschränkung auf Funktionen mit der Periode 2π

Wenn f(x) die Periode T hat, dann hat $F(x) := f\left(\frac{2\pi}{T} \cdot x\right)$ die Periode 2π ,denn

$$F(x + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi} \cdot (x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi} \cdot x + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi} \cdot x\right) = F(x)$$

Umgekehrt gilt: Wenn F(x) die Periode 2π hat, dann hat

$$f(x) := F\left(\frac{2\pi}{T} \cdot x\right)$$

die Periode T, denn

$$f(x+T)=F\left(\frac{2\pi}{T}\cdot(x+T)\right)=F\left(\frac{2\pi}{T}\cdot x+2\pi\right)=F\left(\frac{2\pi}{T}\cdot x\right)=f(x)$$

Definition:

Die Funktion $s_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cdot\cos(kx)+b_k\cdot\sin(kx)\right)$$

heißt ein trigonometrisches Polynom.

Integralformeln:

(1)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cdot\cos(lx)\,dx=\left\{\begin{matrix}0,\ falls\ k\neq l\\ \pi,\ falls\ k=l>0\\ 2\pi,\ falls\ k=l=0\end{matrix}\right\}$$

(2)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cdot\sin(lx)\,dx=\left\{\begin{matrix}0,\ falls\ k\neq l\ oder\ k=l=0\\ \pi,\ falls\ k=l>0\end{matrix}\right\}$$

(3)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cdot\sin(lx)\,dx=0$$

Approximation:

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx) \right) \right) dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,dx + b_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\,dx \right)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = \pi \cdot a_0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) \cdot \cos(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cdot \cos(mx)\,dx + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cdot \cos(mx)\,dx$$

$$= \pi \cdot a_m$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) \cdot \cos(mx)\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) \cdot \sin(mx)\,dx = b_m \cdot \pi$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) \cdot \sin(mx)\,dx$$

Definition:

Sei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π – periodische Funktion, die auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ integrierbar ist. Dann heißt die Funktionenreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx) \right)$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx)\,dx \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx)\,dx \qquad (k = 1,2,3,\ldots)$$

die Fourier-Reihe von f(x). Die Zahlen und heißen die Fourier-Koeffizienten von f.

Konvergenzkriterium für Fourier-Reihen

Sei f eine auf $[-\pi,\pi]$ integrierbare und 2π -periodische Funktion, sodass

$$f\left(x_0^+\right) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad und \quad f\left(x_0^-\right) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

und verallgemeinerte Ableitungen

$$f'\left(x_0^+\right) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f\left(x_0^+\right)}{x - x_0^+} \quad und \quad f'\left(x_0^-\right) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f\left(x_0^-\right)}{x - x_0^-}$$

existieren. Dann konvergiert dir Fourier-Reihe von f an der Stelle gegen das arithmetische Mittel

$$\frac{f\left(x_0^+\right) - f\left(x_0^-\right)}{2}$$

Wenn f in stetig ist, dann gilt

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx)\right)$$

Beispiel:

$$f\left(x_0^+\right) = f\left(x_0^-\right) = f(x_0)$$
$$f'\left(x_0^+\right) = f'\left(x_0^-\right) = f'(x_0)$$

$$f\left(x_1^+\right) = -4 \qquad f\left(x_1^-\right) = 4$$
$$f'\left(x_1^+\right) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f\left(x_1^+\right)}{x - x_1^+} = \lim_{x \to 2\pi^+} \frac{f(x) - (-4)}{x - 2\pi}$$

Für Fourier-Reihen gerader & ungerader Funktionen

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(kx)$, falls f(x) gerade

$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(kx)$, falls f(x) ungerade

Anm.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx)\,dx \qquad \to \textit{für ungerade Funktionen} = 0$$

Beispiel:

Taktsignal einer logischen Schaltung

$$f(x)=\begin{cases} -5,\ falls\ -\pi \le x < -\dfrac{\pi}{2} \\ 5,\ falls\ -\dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ -5,\ falls\ \dfrac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(kx) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cdot\cos(kx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 5\cdot\cos(kx)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-5)\cdot\cos(kx)\,dx \right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(5\cdot\frac{1}{k}\cdot\sin(kx)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + (-5)\cdot\frac{1}{k}\cdot\sin(kx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{5}{k}\left(\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(k\cdot -\frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{5}{k}\cdot\left(\sin\left(k\cdot\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{10}{k}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \frac{5}{k}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \frac{5}{k}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{20}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) = ?$$

$$\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0,\ falls\ k\ gerade \\ (-1)^m,\ falls\ k = 2m+1 \end{cases}$$

$$a_{2k+1} = \frac{20}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{2k+1} \qquad \text{für } k \ge 1 \qquad (falls\ k\ gerade \to a_k = 0)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 5\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 5\,dx = 0$$

$$a_{2k-1} = \frac{20}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \qquad für\ k \geq 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{20}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot \cos(kx) \\ &= \frac{20}{\pi} \cdot \left(\cos(x) - \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{\cos(5x)}{5} - \frac{\cos(7x)}{7} \pm \ldots \right) \end{aligned}$$