Funktionen mit der Periode T > 0

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit der Periode T > 0. Dann hat die Funktion $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$F(x):=f\left(\frac{T}{2\pi}\cdot x\right)$$

die Periode 2π.

$$F(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos(kx)+b_k\cdot\sin(kx)\right)$$

mit

$$a_k=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cdot\cos(kx)\,dx$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cdot\sin(kx)\,dx$$

Substitution:

$$t:=\frac{T}{2\pi}\cdot x,\quad \frac{dt}{dx}=\frac{T}{2\pi}\Rightarrow dx=\frac{2\pi}{T}\cdot dt$$

$$f(t)=F\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$$

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)+b_k\cdot\sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\right)$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cdot\cos(kx)\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}F\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\cdot\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)dt$$

$$=\frac{2}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cdot\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)dt$$

$$b_k=\frac{2}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cdot\sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)dt$$

Beispiel:

$$f(t)=\begin{cases} -t-2,\ falls\ -2\le t<-1 \\ t,\ falls\ -1\le t<1 \\ -t+2,\ falls\ 1\le t<2 \end{cases}$$ und mit der Periode T = 4 fortgesetzt.

Beim Berechnen der Fourier-Reihe kann man sich zu Nutze machen, dass aus zwei ungeraden Funktionen eine gerade wird. Somit reicht es, für die Hälfte der Periode das Integral zu berechnen und dieses zu verdoppeln. Dadurch fällt hier der Faktor vor dem Integral weg.

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{4}\cdot\int_{-\frac{4}{2}}^{\frac{4}{2}} f(t)\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt \\ &= \int_0^2 f(t)\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt \\ &= \int_0^1 t\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt+\int_1^2 (2-t)\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt \end{aligned}$$

Um die Rechnung übersichtlicher zu machen, werden zunächst Stammfunktionen berechnet, in welche dann die Integrationsgrenzen eingesetzt werden.

$$\int t\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt = t\cdot\left(-\frac{\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}{k\cdot\frac{\pi}{2}}\right)+\int\frac{\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}{k\cdot\frac{\pi}{2}}dt$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\cdot t\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)+\frac{4}{k^2\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)+c$$

$$\int_0^1 t\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt = -\frac{2}{k\pi}\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\frac{4}{k^2\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_1^2 2\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt = 2\cdot\left.\left(-\frac{\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}{k\cdot\frac{\pi}{2}}\right)\right|_1^2 = \frac{4}{k\cdot\pi}\cdot\left(-\cos(k\pi)+\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\int_1^2 t\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt = -\frac{4}{k\cdot\pi}\cdot\cos(k\pi)+\frac{4}{k^2\cdot\pi^2}\cdot\sin(k\pi)+\frac{2}{k\cdot\pi}\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\frac{4}{k^2\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
b_k &= -\frac{2}{k\pi}\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\frac{4}{k^2\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\frac{4}{k\cdot\pi}\cdot\cos(k\pi)+\frac{4}{k\cdot\pi}\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\\
&\quad+\frac{4}{k\cdot\pi}\cdot\cos(k\pi)-\frac{4}{k^2\cdot\pi^2}\cdot\sin(k\pi)-\frac{2}{k\cdot\pi}\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\frac{4}{k^2\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\\
&=\frac{8}{k^2\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Durch Wegstreichen aller sich aufhebenden Summanden und dem Summanden mit dem Faktor sin(kπ), der für ganze Zahlen immer 0 ergibt, bleibt nur ein Summand übrig. Die Fourier-Reihe kann nun notiert werden.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\\
&=\frac{8}{\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)-\frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)+\frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{1}{25}\cdot\sin\left(5\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\mp\ldots\\
&=\frac{8}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{\sin\left(2k-1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}{(2k-1)^2}
\end{aligned}
$$