

Beispiel: harmonische Analyse einer Kippspannung

Kippspannung:  $U(t) = \frac{A}{T} \cdot t \quad \text{für} \quad 0 \leq t < T$

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T U(t) dt = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t dt = \frac{2A}{T^2} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^T = \frac{2A}{T^2} \cdot \frac{T^2}{2} = A$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T U(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt = \frac{2A}{T^2} \cdot \int_0^T t \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt \\ &= \frac{2A}{T^2} \cdot \left( t \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}{\frac{2 \cdot k \cdot \pi}{T}} \Big|_0^T - \frac{T}{2 \cdot k \cdot \pi} \cdot \int_0^T \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt \right) \\ &= -\frac{2A}{T^2} \cdot \frac{T}{2 \cdot k \cdot \pi} \cdot \frac{\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}{\frac{2 \cdot k \cdot \pi}{T}} \Big|_0^T \\ &= -\frac{2A}{T^2} \cdot \frac{T^2}{4 \cdot k^2 \cdot \pi^2} \cdot (\cos(k \cdot 2\pi) - \cos(0)) \\ &= 0 \quad \text{für } k \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T U(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt \\ &= \frac{2A}{T^2} \cdot \left( t \cdot \frac{\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}{\frac{2 \cdot k \cdot \pi}{T}} \Big|_0^T + \frac{T}{2 \cdot k \cdot \pi} \cdot \int_0^T \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt \right) \\ &= \frac{2A}{T^2} \cdot \left( -T \cdot \frac{T}{2 \cdot k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi) + \frac{T}{2 \cdot k \cdot \pi} \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}{\frac{2 \cdot k \cdot \pi}{T}} \Big|_0^T \right) \\ &= -\frac{A}{k \cdot \pi} \end{aligned}$$

$$U(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

$$= \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot T \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

In der Kippspannung sind folgende Komponenten vorhanden:

- Der Gleichspannungsanteil beträgt  $\frac{A}{2}$
- Die Grundschwingung hat die Kreisfrequenz  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$   
und die Amplitude  $\frac{A}{\pi}$
- Die Oberschwingungen haben die Kreisfrequenzen  $\omega_1 = \frac{4\pi}{T}$ ,  $\omega_2 = \frac{6\pi}{T}$ ,  $\omega_3 = \frac{8\pi}{T}$ , ...  
und die Amplituden  $A_1 = \frac{A}{2\pi}$ ,  $A_2 = \frac{A}{3\pi}$ ,  $A_3 = \frac{A}{4\pi}$ , ...

Amplitudenspektrum:

## 2.5 Kurze Wiederholung: Komplexe Zahlen

$z = x + iy$  ( $x$  ist der Realteil von  $z$  ( $\Re(z)$ ) und  $y$  der Imaginärteil von  $z$  ( $\Im(z)$ ))

Betrag einer komplexen Zahl:  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Konjugiert komplexe Zahl:  $\bar{z} = x - iy$

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x$$

$$\boxed{\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}}$$

$$z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy$$

$$\boxed{\Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}}$$

Polarkoordinatendarstellung von  $z = x + iy$

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{r} \quad \rightarrow \quad x = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{y}{r} \quad \rightarrow \quad y = r \cdot \sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \quad ; 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Eulersche Formel:

$$\boxed{e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)} \Rightarrow \boxed{z = r \cdot e^{i\varphi}}$$

$$\Re(e^{i\varphi}) = \cos(\varphi) \quad \Im(e^{i\varphi}) = \sin(\varphi)$$

$$\overline{e^{i\varphi}} = \cos(\varphi) - i \sin(\varphi) = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = e^{-i\varphi}$$

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}}$$

$$\begin{aligned} e^{i(\varphi+\psi)} &= \cos(\varphi+\psi) + i \sin(\varphi+\psi) \\ &= \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + i(\sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \sin(\psi) \cdot \cos(\varphi)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} &= (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \cdot (\cos(\psi) + i \sin(\psi)) \\ &= \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) + i \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot i \sin(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) \end{aligned}$$

$$e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi}$$

## 2.6 Komplexe Darstellung von Fourier-Reihen

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion und

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx))$$

die Fourier-Reihe von  $f$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \cdot \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) \quad (\text{erweitern des 2. Summanden mit } i) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k \cdot e^{ikx} + a_k \cdot e^{-ikx} - ib_k \cdot e^{ikx} + ib_k \cdot e^{-ikx}}{2} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k - ib_k}{2} \cdot e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} \cdot e^{-ikx} \right) \end{aligned}$$

$$c_0 := \frac{a_0}{2}$$

$$c_k := \frac{a_k - ib_k}{2} \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

$$c_{-k} := \frac{a_k + ib_k}{2} \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx} + c_{-k} \cdot e^{-ikx} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx}}$$

mit

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx) dx - i \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx) dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot (\cos(kx) - i \sin(kx)) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-ikx} dx \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{ikx} dx \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i(-k)x} dx \end{aligned}$$

$$\boxed{c_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-ikx} dx} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$