

## Tutorium Mathe 2 MT

### Fourier Reihen & Fourier Transformation

#### 1. Fourier Reihen

Die Fourier Reihe ist für die Medientechnik und speziell die Nachrichtentechnik eine der wichtigsten Elemente. Das hängt damit zusammen, dass sie es ermöglicht, Signale zu analysieren und somit Aussagen über jene zu machen, die durch reine Betrachtung im Zeitbereich nicht möglich wären.

Nach Fourier setzt sich jedes beliebige Signal in Sinus und Cosinusschwingungen zerlegen, wodurch es möglich wird, die Frequenzen eines Signals zu ermitteln.

Unterschieden wird zwischen periodischen und nicht-periodischen Signalen. Die im Folgenden beschriebene Fourier Reihe gilt nur für periodische Signale. (Anmerkung: Als „Signale“ werden zur mathematischen Betrachtung Funktionen genutzt)

Entstehen soll eine unendliche trigonometrische Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx))$$

die jeweils die Sinus und Cosinusanteile des Signals in Amplitude und Frequenz als Summenglieder besitzt. Diese Reihe heißt Fourier Reihe von  $f(x)$ .

Zunächst geht es im Folgenden um die Bestimmung der Fourier Koeffizienten  $a_0, a_k$  und  $b_k$ , danach dann um die Berechnung dieser Koeffizienten und der Fourier Reihe.

Fourier Koeffizienten:

Diese kann man sich mit Hilfe der Additionstheoreme herleiten, indem man sich zunächst auf  $2\pi$ -periodische Funktionen beschränkt und sich über Integration der Reihe im Intervall  $[0, 2\pi]$  die Koeffizientenformeln ausrechnet.

Dieser Rechnung liegen folgende Integrale zu Grunde:

$$1. \int_0^{2\pi} \sin(n \cdot x) dx = -\frac{1}{n} \cdot [\cos(n \cdot x)]_0^{2\pi} = \frac{1}{n} \cdot (\cos(n \cdot 2\pi) - \cos(n \cdot 0)) = 0$$

$$2. \int_0^{2\pi} \cos(n \cdot x) dx = \frac{1}{n} \cdot [\sin(n \cdot x)]_0^{2\pi} = -\frac{1}{n} \cdot (\sin(n \cdot 2\pi) - \sin(n \cdot 0)) = 0$$

$$3. \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cdot \cos(lx) dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq l \\ \pi, & \text{falls } k = l > 0 \\ 2\pi, & \text{falls } k = l = 0 \end{cases}$$

$$4. \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cdot \sin(lx) dx = 0$$

$$5. \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cdot \sin(lx) dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq l \text{ oder } k = l = 0 \\ \pi, & \text{falls } k = l > 0 \end{cases}$$

Die unteren drei Integrale können mit Hilfe der Additionstheoreme ermittelt werden.

Möchte man nun die Fourier Koeffizienten bestimmen, muss man die Funktion  $f(x)$  über dem Intervall  $[0, 2\pi]$  integrieren, um die Koeffizienten in Abhängigkeit der Funktion ermitteln zu können.

Ermittlung des Koeffizienten  $a_0$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx)) \right) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{k=1}^n \left( a_k \cdot \int_0^{2\pi} \cos(kx) dx + b_k \cdot \int_0^{2\pi} \sin(kx) dx \right) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi \cdot a_0 \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

Entsprechend ergibt sich für  $a_m$  und  $b_m$  durch Multiplizieren der Reihe mit  $\cos(x)$  (*Berechnung  $a_m$* ) und  $\sin(x)$  (*Berechnung  $b_m$* ) :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(mx) dx &= \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cdot \cos(mx) dx + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cdot \cos(mx) dx \\ &= \pi \cdot a_m \end{aligned}$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(mx) dx$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(mx) dx = b_m \cdot \pi$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(mx) dx$$

In diesem Fall verwendet man die oben gezeigten Integrale auch unter anderem dazu, zu beweisen, dass  $m=k$  ist und man deswegen die gezeigten Umformungen durchführen kann.

Zusammenfassend kann man also sagen, dass eine  $2\pi$ -periodische Funktion  $f(x)$  sich in ihre Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx))$$

entwickeln lässt, wobei die folgenden Berechnungen der Koeffizienten durchgeführt werden müssen:

Formeln für die Fourier-Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(kx) dx \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(kx) dx \quad (k \in \mathbb{N})$$

Kriterien für die Existenz der Fourier Reihe:

1. Das gewählte Periodenintervall lässt sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in denen  $f(x)$  stetig und monoton ist.
2. In den Unstetigkeitsstellen existiert sowohl der rechts- als auch der linksseitige Grenzwert.

Die Konvergenz der Reihe lässt sich, wenn diese beiden Kriterien erfüllt sind, wie folgt beschreiben:

1. Wenn  $f$  im Punkt  $x_0$  stetig ist, dann gilt

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx))$$

2. Wenn die Funktion eine Sprungstelle am Punkt  $x_0$  besitzt, deren Grenzwerte

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

und die verallgemeinerten Ableitungen

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0^+} \quad \text{und} \quad f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0^-}$$

in den Punkten  $x_0^-$  und  $x_0^+$  existieren, dann konvergiert die Reihe an dieser Stelle gegen den arithmetischen Mittelwert der Funktionswerte

$$f_{\text{Reihe}}(x_0) = \frac{f(x_0^+) - f(x_0^-)}{2}$$

Außerdem sind Symmetrieeigenschaften der Funktion entscheidend darüber, welche der drei Koeffizienten man berechnen muss. Wenn man diese vor der Berechnung betrachtet, kann man sich oft einiges an Rechenaufwand sparen.

Bedeutung der Symmetrieeigenschaften von Funktionen bei der Berechnung von Fourier-Reihen:

1. Eine gerade Funktion besitzt nur gerade Reihenglieder, d.h. nur Kosinusanteile. Es entfällt dadurch die Berechnung der Sinusanteile, also der Fourier-Koeffizient  $b_k$ . Die Reihe sieht dann folgendermaßen aus:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \cos(kx)$$

2. Eine ungerade Funktion besitzt nur ungerade Reihenglieder, d.h. nur Sinusanteile. Es entfällt dadurch die Berechnung der Kosinusanteile, also die Fourier-Koeffizienten  $a_0$  und  $a_k$ . Die Reihe sieht dann folgendermaßen aus:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n b_k \cdot \sin(kx)$$

Je mehr Glieder der Fourier Reihe bestimmt werden, desto besser wird die Näherung an die Grundfunktion. Jenes wird im Folgenden durch eine grafische Darstellung gezeigt.

Als Beispiel betrachten wir nun eine Normalparabel im Intervall  $[-\pi, \pi]$ , die  $2\pi$ -periodisch in beide Richtungen fortgesetzt ist (siehe Abb. 1).

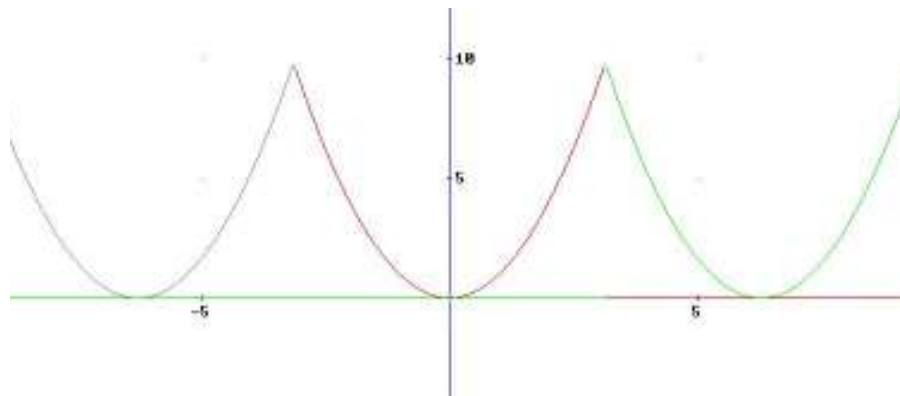


Abb. 1: Die angegebene Funktion  $f(x) = x^2$  mit der  $2\pi$ -periodischen Fortsetzung

Wichtig ist an dieser Stelle natürlich, dass man den Graphen der Funktion vor Augen hat und weiß, mit welchem Signal, also mit welcher Funktion man gerade rumhantiert. Daher wird bei den Übungsaufgaben immer entweder Funktionsterm oder Graph angegeben, um dies zu trainieren.

Beispielaufgabe:

Die Funktion  $f(x) = x^2$  sei auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  stetig und in beide Richtungen  $2\pi$ -periodisch auf der gesamten x-Achse fortgesetzt. Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von  $f$ .

1. Untersuchung der Funktion auf Symmetrie

$x^2$  ist achsensymmetrisch auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$ , daher müssen nur Kosinusanteile bestimmt werden. Es entfällt die Berechnung von  $b_k$

2. Berechnung der Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \left( \frac{\pi^3}{3} - \frac{-\pi^3}{3} \right) = \frac{2 \cdot \pi^2}{3} \\
 a_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \cos(kx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left( \left[ x^2 \cdot \frac{\sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \cdot \frac{\sin(kx)}{k} dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left( -\frac{2}{k} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(kx) dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left( -\frac{2}{k} \left( \left[ x \cdot -\frac{\cos(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot -\frac{\cos(kx)}{k} dx \right) \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left( -\frac{2}{k} \left( \left( -\frac{1}{k} (\pi \cdot \cos(k \cdot \pi) - (-\pi \cdot \cos(k \cdot -\pi))) \right) + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx \right) \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left( -\frac{2}{k} \left( \left( -\frac{2\pi \cdot \cos(k \cdot \pi)}{k} \right) + \frac{1}{k} \left[ \frac{\sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left( -\frac{2}{k} \left( -\frac{2\pi \cdot \cos(k \cdot \pi)}{k} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left( -\frac{2}{k} \left( -\frac{2\pi \cdot (-1)^k}{k} \right) \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left( \frac{4\pi \cdot (-1)^k}{k^2} \right) \\
 &= \frac{4 \cdot (-1)^k}{k^2}
 \end{aligned}$$

Die Fourier Reihe vom  $2\pi$ -periodisch fortgesetztem  $x^2$  lautet also

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} \cdot \cos(kx)$$

Da die Funktion auf  $\mathbb{R}$  stetig ist (keine Sprungstellen an den Intervallgrenzen), kann man die Funktion  $f$  auch als

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cdot \cos(kx)$$

schreiben.

Die bisher betrachteten Funktionen besaßen immer die Periodizität mit  $2\pi$ . Eine Fourier Reihe gibt es aber auch für jene Reihen, welche diese Periodizität nicht besitzen. Dazu stellt man einfach die entsprechenden Parameter (in diesem Fall die Kreisfrequenz) so um, dass eine Form entsteht, die die angegebene Periode auf  $2\pi$  bezieht und es somit ermöglicht, die Berechnung durchzuführen.

Daraus entstehen dann durch die Substitution folgende Fourier-Koeffizienten:

$$t := \frac{T}{2\pi} \cdot x, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{T}{2\pi} \Rightarrow dx = \frac{2\pi}{T} \cdot dt$$

$$f(t) = F\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cdot \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

Komplexe Fourier-Reihe:

Wenn man sich die Definitionen von Sinus und Kosinus anschaut, kann man auch eine weitere Form der Fourier-Reihe ermitteln, bei der mit den komplexen Zahlen gerechnet wird. So ist es möglich, sich die Berechnung der Fourier Koeffizienten zu vereinfachen, weil nur noch ein Koeffizient benötigt wird, der alle Werte enthält. Dieser wird mit  $c_k$  bezeichnet.

Die komplexe Darstellung der Fourier-Reihe einer  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f$  lautet:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-ikx} dx$$

Für eine Funktion  $f$  mit der Periode  $T > 0$  gilt

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i\frac{2\pi k}{T}x} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot e^{-i\frac{2\pi k}{T}x} dx$$

## 2. Fourier Transformation

Die Fourier Transformation ist die Möglichkeit, Funktionen beliebiger Länge und beliebiger Periodizität zu analysieren. Theoretisch kann diese Periode unendlich lang sein. In den Übungsaufgaben wird allerdings darauf verzichtet, weil man auch begrenzte Funktionen durch die Fourier Transformation analysieren kann.

Das Ergebnis einer Fourier Transformation ist ein Frequenzverlauf, das so genannte „kontinuierliche Spektrum“ der Funktion. Jenes gibt an, welche Frequenzen in einem Signal enthalten sind. Daher ist diese Berechnung für alle Frequenzanalysen, z.B. in der Nachrichtentechnik, die Grundlage. Eine elektronische Form der Fourier Transformation findet z.B. in Oszilloskopen Anwendung, wenn man eine FFT Analyse durchführt (FFT = fast Fourier transform).

Die Fourier Transformation erhält man durch Lösen dieser Formel:

$$\hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

Dabei sollte man beachten, dass die Funktion am Ende als Funktion der Frequenz (als Spektrum) angegeben wird, integriert wird allerdings mit der jeweiligen Funktionskonstante der zu analysierenden Funktion.

Die Transformation kann auch, sofern die Funktion im angegebenen Intervall stetig ist, durch die „Inverse Fourier Transformation“ rückgängig gemacht werden.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

Die Fourier Transformation hat einige wichtige Rechenschritte, die nun einmal aufgeführt werden:

- Bestimmung des zu untersuchenden Bereichs (der Integrationsgrenzen) → geht in der Regel aus der Aufgabenstellung hervor, ansonsten den Definitionsbereich der Funktion einsetzen
- Für einige Werte muss man im Falle des „Nichtexistieren“ des Funktionswertes noch eine Extraberechnung durchführen (Bsp. Nenner der berechneten Funktion wird Null)

Zusammenfassend sollte folgendes deutlich sein:

1. Die Fourier Reihe einer periodischen Funktion hat als Ergebnis das diskrete Linienspektrum der Funktion, das die einzelnen enthaltenen Frequenzen und deren Amplitude als Linien (Peaks) zeigt
2. Die Fourier Transformation einer Funktion hat als Ergebnis das kontinuierliche Frequenzspektrum der Funktion, in der alle enthaltenen Frequenzen und deren Amplitude als Funktion der Frequenz zeigt