1. Integralrechnung

1.1 Das unbestimmte Integral

Beispiel:
Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 200 km/h auf ein Stauende zu. Wie weit muss es mindestens noch vom Stau entfernt sein, damit der Fahrer bei einer Vollbremsung noch rechtzeitig zum Stehen kommt? Die Bremsgeschwindigkeit beträgt $a = -\frac{20km/h}{s}$.

Momentan-Geschwindigkeit:

$$\vartheta(t) = a \cdot t + \vartheta_0 = -\frac{20km/h}{s} \cdot t + 200km/h$$

Stillstand:

$$\vartheta(t) = 0$$
$$a \cdot t + \vartheta_0 = 0$$
$$t = -\frac{\vartheta_0}{a} = -\frac{200km/h}{-\frac{20km/h}{s}} = 10s$$
$$\dot{s}(t) = \vartheta(t)$$
$$\dot{s}(t) = a \cdot t + \vartheta_0$$
$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + \vartheta_0 \cdot t + s_0$$

Zu Beginn des Abbremsvorgangs sei t = 0.

$$s(0) = s_0$$
$$s(10) = 0$$
$$s_0 = -\frac{1}{2} a \cdot 10^2 - \vartheta_0 \cdot 10 = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{20km/h}{s} \cdot 100s^2 \cdot 10s$$
$$= 1000km/h \cdot s - 2000km/h \cdot s = \frac{1000}{3600} km - \frac{2000}{3600} km$$
$$= -\frac{10}{36} km \approx -278m$$

Definition:
Eine Funktion F(x) heißt Stammfunktion von der Funktion f(x), wenn F‘(x) = f(x) ist.

Beispiel:

$$f(x) = x^2$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + c \qquad \text{für jedes } c \in \mathbb{R}$$

Bemerkungen:

(1) Wenn f(x) eine Stammfunktion F(x) besitzt, ist jede Funktion F(x) + c mit $c \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Stammfunktion von f(x).

(2) Wenn $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von f(x) sind, dann gilt $F_2(x) = F_1(x) + c$ mit einer Konstanten c.

Definition:
Unbestimmtes Integral

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

$$mit\ F'(x) = f(x)$$

„Integrieren = Aufsuchen einer Stammfunktion“

Ableitungstabelle:

f(x)	f‘(x)
F(x)	f(x)
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Beispiele:

(1) $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c$

(2) $\int \sin(x) = -\int -\sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$

(3) $\int x^4 = \int x^{5-1} = \frac{1}{5} \cdot \int 5x^{5-1} = \frac{x^5}{5} + c$

(4) $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + c$

(5) $\int \frac{1}{x^2} = \int x^{-2} = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$

Integrationsregeln 1:

Funktion	unbestimmtes Integral	Bezeichnung
$f(x) \pm g(x)$	$\int f(x) \pm g(x) dx$ $= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$	Summenregel
$c \cdot f(x)$	$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$	Faktorregel

Beispiel:

$$\int \frac{x^2 - 10}{x} dx = \int \frac{x^2}{x} - \frac{10}{x} dx = \int x dx - \int \frac{10}{x} dx$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} + c \right) - 10 \cdot \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} - 10 \cdot \ln(x) + c$$

Produktregel der Differentialrechnung $\Longrightarrow$ partielle Integration

$$\left(f(x) \cdot g(x) \right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) \cdot g(x) &= \left(f(x) \cdot g(x) \right)' - f(x) \cdot g'(x) \\ \int f'(x) \cdot g(x) dx &= \int \left(f(x) \cdot g(x) \right)' - f(x) \cdot g'(x) dx \\ &= \int \left(f(x) \cdot g(x) \right)' dx - \int f(x) \cdot g'(x) dx \\ &= f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx \end{aligned}$$

Beispiele:

(1) $\int x \cdot e^x dx = e^x \cdot x - \int e^x = e^x \cdot x - e^x + c = (x-1) e^x + c$

(2)
$$\begin{aligned} &\int x^2 \cdot \cos(x) dx = \sin(x) \cdot x^2 - \int \sin(x) \cdot 2x dx \\ &= \sin(x) \cdot x^2 - \left(-\cos(x) \cdot 2x - 2 \cdot \int -\cos(x) dx \right) \\ &= \sin(x) \cdot x^2 - \left(-\cos(x) \cdot 2x - 2 \cdot \sin(x) + c \right) \\ &= \sin(x) \cdot x^2 + \cos(x) \cdot 2x + 2 \cdot \sin(x) + c \end{aligned}$$

(3) $\int \ln(x) dx = \int \ln(x) \cdot 1 dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} = x \cdot \ln(x) - x + c$

Kettenregel der Differentialrechnung $\Longrightarrow$ Integration durch Substitution

$$\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)' = f'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)$$

$$\begin{aligned}\int f\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)dx &= \int F'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)dx = \int F\left(g\left(x\right)\right)'dx \\ &= F\left(g\left(x\right)\right)+c\end{aligned}$$

Substitution: $y := g\left(x\right)$

$$\int f\left(y\right)\cdot y'dx = F\left(y\right)+c = \int f\left(y\right)dy$$

Beispiele:

(1)

$$\int x\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$SUB:\ y = 1+\frac{x^2}{2} \Rightarrow y' = x$$

$$= \int \sqrt{y}\cdot y'dx = \int \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{y^3}+c$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^3}+c$$

(2)

$$\int \tan\left(x\right)dx = \int \frac{\sin\left(x\right)}{\cos\left(x\right)}dx = -\int \frac{1}{\cos\left(x\right)}\cdot -\sin\left(x\right)dx$$

$$SUB:\ y = \cos\left(x\right) \Rightarrow y' = -\sin\left(x\right)$$

$$\int \tan\left(x\right) = -\int \frac{1}{y}\cdot y'dx = -\int \frac{1}{y}dy = -\ln\left(y\right)+c = -\ln\left(\cos\left(x\right)\right)+c$$

(3)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$$

$$SUB:\ y = 1+\sqrt{x} \Rightarrow dx = 2\cdot\left(y-1\right)dy$$

$$= \int \frac{1}{y}\cdot 2\left(y-1\right)dy = 2\cdot\int \frac{y-1}{y}dy = 2\cdot\int \frac{y}{y}-\frac{1}{y}dy$$

$$= \int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = 2\cdot\int 1-\frac{1}{y}dy = 2\cdot\int 1dy - 2\cdot\int \frac{1}{y}dy$$

$$= 2y - 2\ln\left(y\right)+c = 2\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)-2\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+c$$

$$= 2+2\sqrt{x}-2\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+c$$

(4)

$$\int \cos(3x)\,dx$$

$$SUB: y = 3x \Rightarrow dx = \frac{dy}{3}$$

$$= \int \cos(y) \cdot \frac{dy}{3} = \int \frac{1}{3} \cdot \cos(y)\,dy = \frac{1}{3} \cdot \sin(y) + c = \frac{1}{3} \cdot \sin(3x) + c$$

Integrationsregeln 2:

Funktion	unbestimmtes Integral	Bezeichnung
$f'(x) \cdot g(x)$	$\int f'(x) \cdot g(x)\,dx$ $= f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,dx$	partielle Integration
$f(g(x)) \cdot g'(x)$	$y = g(x)$ $\int f(y) \cdot y'\,dx = \int f(y)\,dy$	Substitutionsregel