5.3 Kurvenintegrale (Linienintegrale)

Die Bewegung eines Teilchens werde durch den zeitabhängigen Ortsvektor

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t\in[a,b]$$

beschrieben.

Definition:
Seien $x(t), y(t), z(t) \quad t\in[a,b]$ stetige Funktionen, dann heißt
$K=\{x(t), y(t), z(t) \mid t\in[a,b]\}$ die Kurve von $A=(x(a), y(a), z(a))$ nach $B=(x(b), y(b), z(b))$.

$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t\in[a,b]$ heißt eine Parameterdarstellung der Kurve.

Beispiele:
(1) Die Strecke von A nach B

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(a)+t\cdot(\vec{r}(b)-\vec{r}(a)), \quad t\in[0,1]$$

$$K=\{(a_1+t(b_1-a_1), a_2+t(b_2-a_2), a_3+t(b_3-a_3)) \mid t\in[0,1]\}$$

Andere Parameterdarstellung:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(a)+2t\cdot(\vec{r}(b)-\vec{r}(a)), \quad t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$$

(2) Kreis mit dem Radius r um den Koordinatenursprung

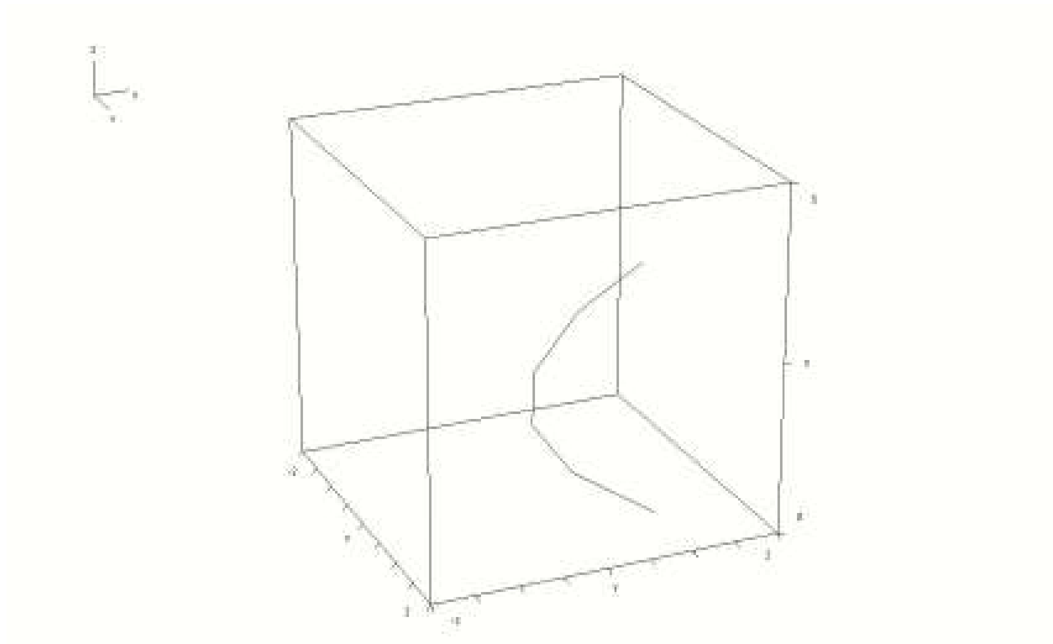
$$K=\left\{\left(r\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right), r\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\right) \mid t\in[0,T]\right\}$$

(3)

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, \quad t\in[0,2\pi]$$

stellt eine Schraubenlinie mit der Ganghöhe 2π dar.

(4) $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad t\in[0,1]$



(5) Der Graph $G = \{(x,y) \mid y = f(x)\}$ hat z.B. die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Definition:
Die Vektorfunktion $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ heißt an der Stelle $t_0 \in]a,b[$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt dann die Ableitung von $\vec{r}(t)$ an der Stelle t_0 und wird mit

$$\vec{r}\,'(t_0) \ oder \ \dot{\vec{r}}(t_0) \ oder \ \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$$

bezeichnet.

$\dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$ ist die mittlere Geschwindigkeit des Teilchens im Zeitintervall $\Delta t = t - t_0$.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

ist die Momentangeschwindigkeit des Teilchens und der Vektor $\dot{\vec{r}}(t)$ hat die Richtung der Tangente an die Kurve zum Zeitpunkt t_0.

Berechnung von $\dot{\vec{r}}(t)$:

$$\dot{\vec{r}}(t)=\lim_{t\to t_0}\begin{pmatrix}\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}\\ \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\\ \frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{x}(t_0)\\ \dot{y}(t_0)\\ \dot{z}(t_0)\end{pmatrix}$$

Beispiele:

(1) Bewegung eines Teilchens längs der Schraubenlinie

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ t\end{pmatrix}$$

Das Teilchen hat die Geschwindigkeit

$$v(t)=\dot{\vec{r}}(t)=\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\\ 1\end{pmatrix}$$

mit $\left|\vec{v}(t)\right|=\sqrt{\left(-\sin(t)\right)^2+\left(\cos(t)\right)^2+1^1}=\sqrt{2}$.

(2)

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\ f(x)\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}\,'(t)=\begin{pmatrix}1\\ f\,'(x)\end{pmatrix}$$

(3) Unter welchem Winkel α muss Torwart Meyer den Ball abstoßen, damit ihn der 60m entfernt stehende Müller erhält. Die Anfangsgeschwindigkeit des Balles betrage 90 km/h.

$$\vec{v}(t)=\begin{pmatrix}\dot{x}(0)\cdot t\\ \dot{y}(0)\cdot t-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2\end{pmatrix}$$

Sei T die Flugzeit des Balls:

$$x(T) = \dot{x}(0) \cdot T = 60$$

$$y(T) = \dot{y}(0) \cdot T - \frac{1}{2} \cdot g \cdot T^2 = 0 \Rightarrow \dot{y}(0) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot T \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \dot{y}(0)}{g}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \dot{x}(0) \cdot \dot{y}(0) = 60 \cdot g$$

$$\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2 = (v_0)^2 = \left(90\frac{km}{h}\right)^2 = \left(90 \cdot \frac{1000m}{3600s}\right)^2 = \left(25\frac{m}{s}\right)^2 = 625\frac{m^2}{s^2}$$

$$\left(\dot{x}(0) + \dot{y}(0)\right)^2 = \dot{x}(0)^2 + 2 \cdot \dot{x}(0) \cdot \dot{y}(0) + \dot{y}(0)^2 = 625 + 600 = 1225$$

$$\left(\dot{x}(0) - \dot{y}(0)\right)^2 = \dot{x}(0)^2 - 2 \cdot \dot{x}(0) \cdot \dot{y}(0) + \dot{y}(0)^2 = 625 - 600 = 25$$

$$\dot{x}(0) + \dot{y}(0) = 35$$

$$\dot{x}(0) - \dot{y}(0) = \pm 5$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \dot{x}(0) = 35 \pm 5$$

1. Fall

$$\dot{x}(0) = 20\frac{m}{s}$$

$$\dot{y}(0) = 15\frac{m}{s}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)} = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 37°$$

2. Fall:

$$\dot{x}(0) = 15\frac{m}{s}$$

$$\dot{y}(0) = 20\frac{m}{s}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)} = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = 53°$$

Beispiel:

Sei ε die Ebene $\varepsilon: x + y + z = 3$. K sei die Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S = (1,1,1)$, die ganz in der Ebene ε liegt.

Parameterdarstellung von ε:

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & & \\ & y & \\ -x & -y & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \text{liegen in der Ebene } \varepsilon .$$

$$\vec{e}_1 := \frac{1}{|\vec{u}|}\cdot\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_1\cdot\vec{v} = |\vec{e}_1|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{e}_1,\vec{v}) = |\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)$$

Der Vektor $\vec{w} := \vec{v}-(\vec{e}_1\cdot\vec{v})\cdot\vec{e}_1$ steht senkrecht auf $\vec{e}_1$.

$$\vec{w}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\left(0+0+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 := \frac{1}{|\vec{w}|}\cdot\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung der Parabel:

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\vec{e}_1+t^2\cdot\vec{e}_2$$

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}1+\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{t^2}{\sqrt{6}}\\1+\frac{2t^2}{\sqrt{6}}\\1-\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{t^2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}$$