Definition:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ oder $G \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\vec{F}: G \to \mathbb{R}^3$. Dann heißt $\vec{F}$ ein Vektorfeld.

Beispiel:

(1) Das elektrostatische Feld einer Punktladung Q

$$E(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |\vec{r}|^3} \cdot \vec{r} = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(2) Kraftfeld:

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$

$\vec{r}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\vec{F}(\vec{r})$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Arbeit im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$:

$W_i \approx \vec{F}(\vec{r}(t_{i-1})) \cdot \Delta\vec{r}_i$

Gesamtarbeit:

$$W_i \approx \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\vec{r}(t_{i-1})) \cdot \Delta\vec{r}_i$$

$$\dot{\vec{r}}(t_i) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t} \approx \frac{\Delta r_i}{\Delta t_i} \Rightarrow \Delta\vec{r}_i \approx \dot{\vec{r}}(t_{i-1}) \cdot \Delta t_i$$

$$\Rightarrow W \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\vec{r}(t_{i-1})) \cdot \dot{\vec{r}}(t_{i-1}) \cdot \Delta t_i$$

(Riemann'sche Summe von $[a,b] \to \mathbb{R}, t \to \vec{F}(\vec{r}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t))$ zur Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und der Wahl der Zwischenpunkte t_{i-1})

Definition:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ oder $G \subseteq \mathbb{R}^2$, $\vec{F}: G \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld und $K \subseteq G$ eine Kurve mit einer stetig differenzierbaren Parameterdarstellung $\vec{r}(t), t \in [a,b]$. Dann heißt das eindimensionale reelle Integral

$$\int_K \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\vec{r}(t_{i-1})) \cdot \dot{\vec{r}}(t_{i-1}) \cdot \Delta t_i$$

das Kurvenintegral (Linienintegral) über K.

Bemerkungen:

(1) $\int_K \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r}$ ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung von K und es gilt

$$\boxed{\int_K \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_a^b F(\vec{r}(t))\cdot\dot{\vec{r}}(t)\,dt}$$

(2)

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f(x,y,z) \\ g(x,y,z) \\ h(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$\int_K \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}}\,dt = \int_a^b f(x,y,z)\cdot\dot{x} + g(x,y,z)\cdot\dot{y} + h(x,y,z)\cdot\dot{z}\,dt$$

$$\boxed{\int_K \vec{F}\,d\vec{r} = \int_a^b f(x,y,z)\cdot dx + g(x,y,z)\cdot dy + h(x,y,z)\cdot dz}$$

Beispiele:

(1)

$$\int_K x-y\,dx + x+y\,dy + z\,dz \qquad\qquad K = \{(\cos(t),\sin(t),t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$$

$$\int_K (x-y)\,dx + (x+y)\,dy + z\,dz = \int_0^{2\pi} \left((x-y)\cdot\dot{x} + (x+y)\cdot\dot{y} + z\cdot\dot{z}\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left((\cos(t)-\sin(t))\cdot -\sin(t) + (\cos(t)+\sin(t))\cdot\cos(t) + t\cdot 1\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sin(t)\cdot\cos(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t) + \sin(t)\cdot\cos(t) + t\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1+t\,dt = t + \frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi + 2\pi^2 = 2\pi\cdot(1+\pi)$$

(2) $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 \\ x\cdot y \\ x+y+z \end{pmatrix}$, K sei die Strecke von A$(2,1,-1)$ nach B$(1,3,0)$

$$K:\vec{r}=\vec{a}+t\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-t\\1+2t\\-1+t\end{pmatrix},\ 0\le t\le 1$$

$$\int_K \vec{F}\,d\vec{r}=\int_0^1\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot\dot{x}+x\cdot y\cdot\dot{y}+\left(x+y+z\right)\cdot\dot{z}\right)dt$$

$$=\int_0^1\left(\left((2-t)^2+(1+2t)^2+\left(-1+t\right)^2\right)\cdot -1+\left(2-t\right)\cdot\left(1+2t\right)\cdot 2+\left(2-t+1+2t+-1+t\right)\cdot 1\right)dt$$

$$=\int_0^1 -4+4t-t^2-1-4t-4t^2-1-2t-t^2+4+6t-4t^2+2-t+1+2t-1+t\ dt$$

$$=\int_0^1\left(-10t^2+10t\right)dt=-\frac{10}{3}t^3+5t^2\Big|_0^1=-\frac{10}{3}+\frac{15}{3}=\frac{5}{3}$$

Definition:
Sei $\vec{F}:G\to\mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. $\vec{F}$ heißt konservativ, wenn es eine differenzierbare Funktion $U:G\to\mathbb{R}$ gibt mit

$$\vec{F}=grad\left(U\right)$$

U heißt dann ein Potential von $\vec{F}$.

Definition:
Eine Kurve K mit der differenzierbaren Parameterdarstellung heißt glatt, wenn $\dot{\vec{r}}\left(t\right)\neq 0$ für alle $t\in\left]a,b\right[$.

Hauptsatz über Kurvenintegrale:
Sei $G\subseteq\mathbb{R}^3\ \left(\mathbb{R}^2\right)$ und $\vec{F}:G\to\mathbb{R}^3$ ein konservatives Vektorfeld mit dem Potential $U:G\to\mathbb{R}$. Sei K eine glatte Kurve mit der Parameterdarstellung $\vec{r}\left(t\right),t\in\left[a,b\right]$. Dann gilt

$$\boxed{\int_K \vec{r}\,d\vec{r}=U\left(\vec{r}\left(b\right)\right)-U\left(\vec{r}\left(a\right)\right)}$$

Beweis:

$$\int_K \vec{F}\left(\vec{r}\right)d\vec{r}=\int_a^b \vec{F}\left(\vec{r}\left(t\right)\right)\cdot\dot{\vec{r}}\,dt=\int_a^b grad\left(U\left(\vec{r}\left(t\right)\right)\right)\cdot\dot{\vec{r}}\,dt=\int_a^b U'\left(\vec{r}\left(t\right)\right)\cdot\dot{\vec{r}}\,dt$$

$$=\int_a^b\frac{dU}{dt}\vec{r}\left(t\right)\,dt=\int_{U\left(\vec{r}(a)\right)}^{U\left(\vec{r}(b)\right)}dU=U\left(\vec{r}\left(b\right)\right)-U\left(\vec{r}\left(a\right)\right)$$

Satz:
Sei G eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ und $\vec{F}:G\to\mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\vec{F}$ ist konservativ

(2) $\int_K \vec{F}\, d\vec{r}$ hängt nicht von der Kurve K, sondern nur vom Anfangs- und Endpunkt von K ab

(3) $\oint_K \vec{F}\, d\vec{r} = 0$ (K ist geschlossen, d.h. $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$)

Beispiele:

(1)

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ z \\ y+e^z \end{pmatrix}$$

K sei derjenige Kreis mit Mittelpunkt auf der y-Achse, der den Punkt $(1,2,0)$ mit dem Punkt $(2,0,1)$ verbindet.

Versuchsweiser Ansatz eines Potenzials $U(x,y,z)$:

$$U_x(x,y,z) = 2x, \quad U_y(x,y,z) = z, \quad U_z(x,y,z) = y+e^z$$
$$U(x,y,z) = \int 2x\,dx = x^2 + C(y,z)$$
$$C(y,z) = U(x,y,z) - x^2$$
$$C_y(y,z) = U_y(x,y,z) = z \quad \Rightarrow C(y,z) = y\cdot z + C(z)$$
$$C(z) = C(y,z) - y\cdot z$$
$$C'(z) = C_z(y,z) - y = U_z(x,y,z) - y = y + e^z - y = e^z \quad \Rightarrow C(z) = e^z$$

$$U(x,y,z) = x^2 + C(y,z) - x^2 + y\cdot z + C(z) = x^2 + y\cdot z + e^z$$

Probe:

$$U_x(x,y,z) = 2x$$
$$U_y(x,y,z) = z$$
$$U_z(x,y,z) = y+e^z$$

$$\int_K \vec{F}\, d\vec{r} = U(2,0,1) - U(1,2,0) = 4 + e - 2 = 2 + e$$

(2)

$$\int \left(4x^3-2y\right)dx+\left(2y-2x\right)dy \qquad und \qquad K=\left\{\left(3\cos(t),2\sin(t)\right) \mid 0\le t\le \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(4x^3-2y\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2y-2x\right)$$

$$-2=-2$$

$\Rightarrow \left(4x^3-2y\right)dx+\left(2y-2x\right)dy=0$ ist exakt

➔ Es gibt ein Potential $U(x,y)$ mit $U_x=4x^3-2y$ und $U_y(x,y)=2y-2x$

$$U(x,y)=\int\left(4x^3-2y\right)dx=x^4-2xy+C(y)$$

$$C(y)=U(x,y)-x^4+2xy$$

$$C'(y)=U_y(x,y)+2x=2y-2x+2x=2y \qquad \Rightarrow C(y)=y^2$$

$$U(x,y)=x^4-2xy+y^2$$

$$\int_K\left(4x^3-2y\right)dy+\left(2y-2x\right)dy=U(0,2)-U(3,0)=4-81=-77$$