

Definition:

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  oder  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $\vec{F} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Dann heißt  $\vec{F}$  ein Vektorfeld.

Beispiel:

(1) Das elektrostatische Feld einer Punktladung Q

$$E(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot |\vec{r}|^3} \cdot \vec{r} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(2) Kraftfeld:

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

$\vec{r}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\vec{F}(\vec{r})$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Arbeit im Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r})$ :

$$W_i \approx \vec{F}(\vec{r}(t_{i-1})) \cdot \Delta \vec{r}_i$$

Gesamtarbeit:

$$W \approx \sum_{i=1}^n W_i \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(\vec{r}(t_{i-1})) \cdot \Delta \vec{r}_i$$

$$\dot{\vec{r}}(t_i) = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t} \approx \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t_i} \Rightarrow \Delta \vec{r}_i \approx \dot{\vec{r}}(t_{i-1}) \cdot \Delta t_i$$

$$\Rightarrow W \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(\vec{r}(t_{i-1})) \cdot \dot{\vec{r}}(t_{i-1}) \cdot \Delta t_i$$

(Riemann'sche Summe von  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$ ) zur Zerlegung

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  und der Wahl der Zwischenpunkte  $t_{i-1}$ )

Definition:

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  oder  $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{F} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetiges Vektorfeld und  $K \subseteq G$  eine Kurve mit einer stetig differenzierbaren Parameterdarstellung  $\vec{r}(t), t \in [a, b]$ . Dann heißt das eindimensionale reelle

Integral

$$\int_K \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}(\vec{r}(t_{i-1})) \cdot \dot{\vec{r}}(t_{i-1}) \cdot \Delta t_i$$

das Kurvenintegral (Linienintegral) über K.

Bemerkungen:

(1)  $\int_K \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$  ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung von K und es gilt

$$\boxed{\int_K \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt}$$

(2)

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ g(x, y, z) \\ h(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$\int_K \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_a^b \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} dt = \int_a^b f(x, y, z) \cdot \dot{x} + g(x, y, z) \cdot \dot{y} + h(x, y, z) \cdot \dot{z} dt$$

$$\boxed{\int_K \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b f(x, y, z) \cdot dx + g(x, y, z) \cdot dy + h(x, y, z) \cdot dz}$$

Beispiele:

(1)

$$\int_K x - y dx + x + y dy + z dz \quad K = \{(\cos(t), \sin(t), t) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

$$\int_K (x - y) dx + (x + y) dy + z dz = \int_0^{2\pi} ((x - y) \cdot \dot{x} + (x + y) \cdot \dot{y} + z \cdot \dot{z}) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} ((\cos(t) - \sin(t)) \cdot (-\sin(t)) + (\cos(t) + \sin(t)) \cdot \cos(t) + t \cdot 1) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin(t) \cdot \cos(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t) + \sin(t) \cdot \cos(t) + t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 + t dt = t + \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi + 2\pi^2 = 2\pi \cdot (1 + \pi)$$

(2)  $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ x \cdot y \\ x + y + z \end{pmatrix}$ , K sei die Strecke von A(2, 1, -1) nach B(1, 3, 0)

$$K : \vec{r} = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 1+2t \\ -1+t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned} \int_K \vec{F} d\vec{r} &= \int_0^1 \left( (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \dot{x} + x \cdot y \cdot \dot{y} + (x + y + z) \cdot \dot{z} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( ((2-t)^2 + (1+2t)^2 + (-1+t)^2) \cdot (-1) + (2-t) \cdot (1+2t) \cdot 2 + (2-t+1+2t+(-1+t)) \cdot 1 \right) dt \\ &= \int_0^1 (-4 + 4t - t^2 - 1 - 4t - 4t^2 - 1 - 2t - t^2 + 4 + 6t - 4t^2 + 2 - t + 1 + 2t - 1 + t) dt \\ &= \int_0^1 (-10t^2 + 10t) dt = -\frac{10}{3}t^3 + 5t^2 \Big|_0^1 = -\frac{10}{3} + \frac{15}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Definition:

Sei  $\vec{F} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Vektorfeld.  $\vec{F}$  heißt konservativ, wenn es eine differenzierbare Funktion  $U : G \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$\vec{F} = \text{grad}(U)$$

U heißt dann ein Potential von  $\vec{F}$ .

Definition:

Eine Kurve K mit der differenzierbaren Parameterdarstellung heißt glatt, wenn  $\dot{\vec{r}}(t) \neq 0$  für alle  $t \in ]a, b[$ .

Hauptsatz über Kurvenintegrale:

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  ( $\mathbb{R}^2$ ) und  $\vec{F} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein konservatives Vektorfeld mit dem Potential  $U : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Sei K eine glatte Kurve mit der Parameterdarstellung  $\vec{r}(t), t \in [a, b]$ . Dann gilt

$$\boxed{\int_K \vec{r} d\vec{r} = U(\vec{r}(b)) - U(\vec{r}(a))}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_K \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}} dt = \int_a^b \text{grad}(U(\vec{r}(t))) \cdot \dot{\vec{r}} dt = \int_a^b U'(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}} dt \\ &= \int_a^b \frac{dU}{dt} \vec{r}(t) dt = \int_{U(\vec{r}(a))}^{U(\vec{r}(b))} dU = U(\vec{r}(b)) - U(\vec{r}(a)) \end{aligned}$$

Satz:

Sei G eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  und  $\vec{F} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetiges Vektorfeld. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1)  $\vec{F}$  ist konservativ

(2)  $\int_K \vec{F} d\vec{r}$  hängt nicht von der Kurve  $K$ , sondern nur vom Anfangs- und Endpunkt von  $K$  ab

(3)  $\oint_K \vec{F} d\vec{r} = 0$  ( $K$  ist geschlossen, d.h.  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ )

Beispiele:

(1)

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ z \\ y + e^z \end{pmatrix}$$

$K$  sei derjenige Kreis mit Mittelpunkt auf der  $y$ -Achse, der den Punkt  $(1, 2, 0)$  mit dem Punkt  $(2, 0, 1)$  verbindet.

Versuchsweiser Ansatz eines Potentials  $U(x, y, z)$ :

$$U_x(x, y, z) = 2x, \quad U_y(x, y, z) = z, \quad U_z(x, y, z) = y + e^z$$

$$U(x, y, z) = \int 2x dx = x^2 + C(y, z)$$

$$C(y, z) = U(x, y, z) - x^2$$

$$C_y(y, z) = U_y(x, y, z) = z \quad \Rightarrow \quad C(y, z) = y \cdot z + C(z)$$

$$C(z) = C(y, z) - y \cdot z$$

$$C'(z) = C_z(y, z) - y = U_z(x, y, z) - y = y + e^z - y = e^z \quad \Rightarrow \quad C(z) = e^z$$

$$U(x, y, z) = x^2 + C(y, z) - x^2 + y \cdot z + C(z) = x^2 + y \cdot z + e^z$$

Probe:

$$U_x(x, y, z) = 2x$$

$$U_y(x, y, z) = z$$

$$U_z(x, y, z) = y + e^z$$

$$\int_K \vec{F} d\vec{r} = U(2, 0, 1) - U(1, 2, 0) = 4 + e - 2 = 2 + e$$

(2)

$$\int (4x^3 - 2y) dx + (2y - 2x) dy \quad \text{und} \quad K = \left\{ (3 \cos(t), 2 \sin(t)) \mid 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(4x^3 - 2y) = \frac{\partial}{\partial x}(2y - 2x)$$

$$-2 = -2$$

$$\Rightarrow (4x^3 - 2y) dx + (2y - 2x) dy = 0 \text{ ist exakt}$$

➔ Es gibt ein Potential  $U(x, y)$  mit  $U_x = 4x^3 - 2y$  und  $U_y(x, y) = 2y - 2x$

$$U(x, y) = \int (4x^3 - 2y) dx = x^4 - 2xy + C(y)$$

$$C(y) = U(x, y) - x^4 + 2xy$$

$$C'(y) = U_y(x, y) + 2x = 2y - 2x + 2x = 2y \quad \Rightarrow C(y) = y^2$$

$$U(x, y) = x^4 - 2xy + y^2$$

$$\int_K (4x^3 - 2y) dy + (2y - 2x) dy = U(0, 2) - U(3, 0) = 4 - 81 = -77$$