

1. Beispiel: Ausdehnungsarbeit eines Gases

Die Kraft $F(x)$ ist für $x \in [x_{i-1}, x_i]$ näherungsweise konstant $= F(z_i)$. Die vom Gas am Stempel verrichtete Arbeit ist $\Delta W_i = F(z_i) \cdot \Delta x_i$.

Gesamtarbeit bei der Ausdehnung des Stempels von a nach b :

$$W \approx \sum_{i=1}^n F(z_i) \cdot \Delta x_i \xrightarrow[\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}]{b} \int_a^b f(x) dx$$

Definition: $W = \int_a^b f(x) dx$ ($W = \text{Arbeit}$)

Technischer Ansatz:

$$\Delta W_i = F(z_i) \cdot \Delta x_i$$

$$dW = F(x) \cdot dx$$

$$W = \int_{W(a)}^{W(b)} dW = \int_a^b F(x) dx$$

(\rightarrow differentielle Größen)

Gasdruck:

$$p(x) = \frac{F(x)}{A} \Leftrightarrow F(x) = p(x) \cdot A$$

$$W = \int_a^b p(x) \cdot A dx = A \cdot \int_a^b p(x) dx$$

($A = \text{Querschnittsfläche des Kolbens}$)

Isotherme Volumenänderung:

Boyle-Mariotte-Gesetz: $p(x) \cdot V(x) = c$ ($V(x) = \text{Volumen des Isotherms}$)

$$\begin{aligned} W &= A \cdot \int_a^b \frac{c}{V(x)} dx = A \cdot \int_a^b \frac{c}{A \cdot x} dx = c \cdot \int_a^b \frac{1}{x} dx = c \cdot \ln(x) \Big|_a^b \\ &= c \cdot (\ln(b) - \ln(a)) = c \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

Beispiel: Cavalierisches Prinzip

Volumenelement: $dV = A(x) \cdot dx$

Volumen des Körpers: $V = \int_0^V dV = \int_a^b A(x) dx$

Anwendung: Bestimmung des Volumens eines Körpers durch Annäherung mit kleinen Scheiben, deren Dicke gegen 0 läuft.

Rotationssymmetrische Körper

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \left(\pi \cdot f(x)^2 \right) dx \\ &= \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx \end{aligned}$$

Beispiel: Volumen eines Rotationsellipsoids

Allgemeine Ellipsengleichung: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Berechnung von y (nur der positive Bereich kann als Funktion untersucht werden):

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{x^2}{a^2} \\ y^2 &= b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \\ y &= b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \end{aligned}$$

Volumen des Rotationsellipsoids:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_{-a}^a b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \\ &= \pi \cdot b^2 \cdot \int_{-a}^a 1 dx - \int_{-a}^a \frac{x^2}{a^2} dx \\ &= \pi \cdot b^2 \cdot \left. x \right|_{-a}^a - \left. \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{a^2} \right|_{-a}^a \\ &= \pi \cdot b^2 \cdot \left(\left(a - \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{a^2} \right) - \left(-a - \frac{1}{3} \cdot \frac{-a^3}{a^2} \right) \right) \\ &= \pi \cdot b^2 \cdot \left(\frac{2}{3} a + \frac{2}{3} a \right) = \frac{4}{3} \pi \cdot a \cdot b^2 \end{aligned}$$

Im Fall $a = b = r$ erhält man das Kugelvolumen

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

Bestimmung Länge eines Graphen:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 \\ (ds)^2 &= \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot (dx)^2 \\ (ds)^2 &= \left(1 + f'(x)^2\right) \cdot (dx)^2 \\ ds &= \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx \end{aligned}$$

Länge des Graphen der Funktion $y = f(x)$ $x \in [a, b]$ wird definiert als

$$s = \int_0^s ds = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Beispiel:

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, 0 \leq x \leq \sqrt{2}$$

Länge des Graphen:

$$s = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2} dx$$

Wdh.: Substitutionsregel für bestimmte Integrale

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

$$SUB: x = \sinh(t) = g(t) \Rightarrow g'(t) = \cosh(t)$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2} dx = \int_0^{a \sinh(\sqrt{2})} \sqrt{1+\sinh^2(t)} \cdot \cosh(t) dt$$

$$Anm.: \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2} dx = \int_0^{a \sinh(\sqrt{2})} \sqrt{\cosh^2(t)} \cdot \cosh(t) dt = \int_0^{a \sinh(\sqrt{2})} \cosh^2(t) dt$$

$$\int \cosh^2(t) dt = \sinh(t) \cdot \cosh(t) - \int \sinh^2(t) dt \quad (u(t) = \cosh(t), v'(t) = \cosh(t))$$

$$= \sinh(t) \cdot \cosh(t) - \left(\int \cosh^2 dt - \int 1 dt \right)$$

$$= \sinh(t) \cdot \cosh(t) - \left(\int \cosh^2 dt - t \right)$$

$$2 \cdot \int \cosh^2(t) dt = \sinh(t) \cdot \cosh(t) + t + c$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \sinh(t) \cdot \cosh(t) \Big|_0^{a \sinh(\sqrt{2})} + \frac{t}{2} \Big|_0^{a \sinh(\sqrt{2})}$$

$$y = a \sinh(\sqrt{2}) \Leftrightarrow \sinh(y) = \sqrt{2}$$

$$\sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \sqrt{2}$$

$$e^y - e^{-y} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$e^y - \frac{1}{e^y} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$(e^y)^2 - 1 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot e^y \quad SUB: z = e^y$$

$$z^2 - 1 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot z$$

$$z^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot z - 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2+1} \Rightarrow z = \sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ (die andere Lösung ist negativ, fällt daher weg)}$$

$$e^y = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Leftrightarrow y = \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

Berechnen der Grenzen:

$$\sinh(a \sinh(\sqrt{2})) = \sqrt{2}$$

$$\cosh(a \sinh(\sqrt{2})) = \sqrt{1 + \sinh(a \sinh(\sqrt{2}))^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

Einsetzen der Grenzen:

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}))$$

$$\approx 1,798$$

Beispiel: Mantelfläche eines Rotationskörpers

Mantelfläche des Kegelstumpfes:

$$dM = 2\pi \cdot y \cdot ds$$

$$= 2\pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$$

Mantelfläche des Rotationskörpers:

$$M = \int_0^M dM = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Beispiel: Oberfläche eines Zuckerhuts

$$M = 2\pi \cdot \int_0^6 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}\right)^2} dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^6 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^6 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx = 2\pi \cdot \int_0^6 \left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx = 2\pi \cdot \frac{\left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^6 = \frac{4}{3} \pi \cdot \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^3} \Bigg|_0^6$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^3} - \frac{4}{3} \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{4}{3} \pi \left(\left(\frac{5}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right) = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{124}{8} = \frac{372}{24} \cdot \frac{32}{24} \pi = \frac{62}{3} \pi$$