1. Beispiel: Ausdehnungsarbeit eines Gases

Die Kraft F(x) ist für $x \in [x_{i-1}, x_i]$ näherungsweise konstant = F(z_i). Die vom Gas am Stempel verrichtete Arbeit ist $\Delta W_i = F(z_i) \cdot \Delta x_i$.

Gesamtarbeit bei der Ausdehnung des Stempels von a nach b:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} F(z_i) \cdot \Delta x_i \xrightarrow[\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}]{} \int_a^b f(x)\,dx$$

Definition: $W = \int_a^b f(x)\,dx$ (W = Arbeit)

Technischer Ansatz:

$$\Delta W_i = F(z_i) \cdot \Delta x_i$$

$$dW = F(x) \cdot dx$$

$$W = \int_{W(a)}^{W(b)} dW = \int_a^b F(x)\,dx$$

(→differentielle Größen)

Gasdruck:

$$p(x) = \frac{F(x)}{A} \Leftrightarrow F(x) = p(x) \cdot A$$

$$W = \int_a^b p(x) \cdot A\,dx = A \cdot \int_a^b p(x)\,dx$$

(A = Querschnittsfläche des Kolbens)

Isotherme Volumenänderung:

Boyle-Mariotte-Gesetz: $p(x) \cdot V(x) = c$ (V(x)=Volumen des Isotherms)

$$W = A \cdot \int_a^b \frac{c}{V(x)}\,dx = A \cdot \int_a^b \frac{c}{A \cdot x}\,dx = c \cdot \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = c \cdot \ln(x)\Big|_a^b$$

$$= c \cdot \left(\ln(b) - \ln(a)\right) = c \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Beispiel: Calvalierisches Prinzip

Volumenelement: $dV = A(x) \cdot dx$

Volumen des Körpers: $V = \int_0^V dV = \int_a^b A(x)\,dx$

Anwendung: Bestimmung des Volumens eines Körpers durch Annäherung mit kleinen Scheiben, deren Dicke gegen 0 läuft.

Rotationssymetrische Körper

$$V = \int_a^b \left(\pi \cdot f(x)^2\right) dx$$
$$= \pi \cdot \int_a^b f(x)^2\,dx$$

Beispiel: Volumen eines Rotationsellipsoiden

Allgemeine Ellipsengleichung: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Berechnung von y (nur der positive Bereich kann als Funktion untersucht werden):

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$
$$y^2 = b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$
$$y = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Volumen des Rotationsellipsoiden:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_{-a}^{a} b^2 \cdot \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx \\
&= \pi \cdot b^2 \cdot \int_{-a}^{a} 1\,dx - \int_{-a}^{a} \frac{x^2}{a^2}\,dx \\
&= \pi \cdot b^2 \cdot x\Big|_{-a}^{a} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{a^2}\Bigg|_{-a}^{a} \\
&= \pi \cdot b^2 \cdot \left(\left(a - \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{a^2}\right) - \left(-a - \frac{1}{3} \cdot \frac{-a^3}{a^2}\right)\right) \\
&= \pi \cdot b^2 \cdot \left(\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot a \cdot b^2
\end{aligned}
$$

Im Fall a = b = r erhält man das Kugelvolumen

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

Bestimmung Länge eines Graphen:

$$
\begin{aligned}
(ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 \\
(ds)^2 &= \left(1+\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot (dx)^2 \\
(ds)^2 &= \left(1+f'(x)^2\right) \cdot (dx)^2 \\
dx &= \sqrt{1+f'(x)^2} \cdot dx
\end{aligned}
$$

Länge des Graphen der Funktion y = f(x) $x \in [a,b]$ wird definiert als

$$s = \int_0^s ds = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Beispiel:

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, 0 \le x \le \sqrt{2}$$

Länge des Graphen:

$$s = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx$$

Wdh.: Substitutionsregel für bestimmte Integrale

$$\int_a^b f\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f\left(y\right)dy$$

$$SUB: \ x = \sinh\left(t\right) = g\left(t\right) \Rightarrow g'\left(t\right) = \cosh\left(t\right)$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^{a\sinh\left(\sqrt{2}\right)} \sqrt{1+\sinh^2\left(t\right)}\cdot\cosh\left(t\right)dt$$

$$Anm.: \cosh^2\left(t\right)-\sinh^2\left(t\right)=1 \ \textit{für alle} \ t\in\mathbb{R}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^{a\sinh\left(\sqrt{2}\right)} \sqrt{\cosh^2\left(t\right)}\cdot\cosh\left(t\right)dt = \int_0^{a\sinh\left(\sqrt{2}\right)} \cosh^2\left(t\right)dt$$

$$\int \cosh^2\left(t\right)dt = \sinh\left(t\right)\cdot\cosh\left(t\right) - \int \sinh^2\left(t\right)dt \quad \left(u\left(t\right)=\cosh\left(t\right), v'\left(t\right)=\cosh\left(t\right)\right)$$

$$= \sinh\left(t\right)\cdot\cosh\left(t\right) - \left(\int \cosh^2 dt - \int 1dt\right)$$

$$= \sinh\left(t\right)\cdot\cosh\left(t\right) - \left(\int \cosh^2 dt - t\right)$$

$$2\cdot\int \cosh^2\left(t\right)dt = \sinh\left(t\right)\cdot\cosh\left(t\right) + t + c$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\sinh\left(t\right)\cdot\cosh\left(t\right)\Big|_0^{a\sinh\left(\sqrt{2}\right)} + \frac{t}{2}\Big|_0^{a\sinh\left(\sqrt{2}\right)}$$

$$y = a\sinh\left(\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \sinh\left(y\right) = \sqrt{2}$$

$$\sinh\left(y\right) = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \sqrt{2}$$

$$e^y - e^{-y} = 2\cdot\sqrt{2}$$

$$e^y - \frac{1}{e^y} = 2\cdot\sqrt{2}$$

$$\left(e^y\right)^2 - 1 = 2\cdot\sqrt{2}\cdot e^y \qquad SUB: z = e^y$$

$$z^2 - 1 = 2\cdot\sqrt{2}\cdot z$$

$$z^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot z - 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2+1} \Rightarrow z = \sqrt{2}+\sqrt{3}\left(\textit{die andere Lösung ist negativ, fällt daher weg}\right)$$

$$e^y = \sqrt{2}+\sqrt{3} \Leftrightarrow y = \ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$$

Berechnen der Grenzen:

$$\sinh\left(a\sinh\left(\sqrt{2}\right)\right)=\sqrt{2}$$
$$\cosh\left(a\sinh\left(\sqrt{2}\right)\right)=\sqrt{1+\sinh\left(a\sinh\left(\sqrt{2}\right)\right)}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$$

Einsetzen der Grenzen:

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{6}+\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)$$
$$\approx 1{,}798$$

Beispiel: Mantelfläche eines Rotationskörpers

Mantelfläche des Kegelstumpfes:

$$\begin{aligned} dM &= 2\pi\cdot y\cdot ds \\ &= 2\pi\cdot f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}\cdot dx \end{aligned}$$

Mantelfläche des Rotationskörpers:

$$M=\int_0^M dM = 2\pi\cdot\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Beispiel: Oberfläche eines Zuckerhuts

$$\begin{aligned} M &= 2\pi\cdot\int_0^6\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\right)^2}\,dx \\ &= 2\pi\cdot\int_0^6\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx \\ &= 2\pi\cdot\int_0^6\sqrt{x+\frac{1}{4}}\,dx = 2\pi\cdot\int_0^6\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}dx = 2\pi\cdot\left.\frac{\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^6 = \frac{4}{3}\pi\cdot\left.\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^3}\right|_0^6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{4}{3}\pi\cdot\sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^3}-\frac{4}{3}\pi\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3}=\frac{4}{3}\pi\left(\left(\frac{5}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{124}{8}=\frac{372}{24}\cdot\frac{32}{24}\pi=\frac{62}{3}\pi$$