

## 1.5 Integration durch Partialbruchzerlegung

Beispiel:

$$\int \frac{2x^3 - 14x^2 + 14x + 30}{x^2 - 4} dx = ?$$

1. Schritt: Polynomdivision (nur dann, wenn Grad des Zählers > Grad des Nenners)

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 14x^2 + 14x + 30) : (x^2 - 4) = 2x - 14 + \frac{22x - 26}{x^2 - 4} \\ \underline{-2x^3 \quad -8x} \phantom{+30} \\ -14x^2 + 22x + 30 \\ \underline{-14x^2 \phantom{+22x} +56} \\ 22x - 26 \end{array}$$

Die Division ist beendet, weil der Grad des Ergebnisses kleiner als der des Nenner-Polynoms ist.

2. Schritt: Bestimmung der Nullstellen des Nenner-Polynoms

$$\begin{aligned} x^2 - 4 = 0 &\Rightarrow x_{1,2} = \pm 2 \\ x^2 - 4 &= (x - 2) \cdot (x - (-2)) \end{aligned}$$

3. Schritt Aufstellen des Ansatzes für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{22x + 26}{x^2 - 4} = \frac{22x - 26}{(x - 2) \cdot (x + 2)} = \frac{A}{(x - 2)} + \frac{B}{(x + 2)} \quad \Big| \cdot x^2 - 4 = (x - 2) \cdot (x + 2)$$

4. Schritt: Bestimmung der Unbekannten Konstanten

$$22x - 26 = A \cdot (x + 2) + B \cdot (x - 2)$$

$$x = 2: 22 - 2 - 26 = A \cdot (2 + 2) + B \cdot (2 - 2)$$

$$\Rightarrow 18 = 4A \Leftrightarrow A = \frac{9}{2}$$

$$x = -2: 22 - (-2) - 26 = A \cdot (2 - 2) + B \cdot (2 - (-2))$$

$$\Rightarrow -70 = -4B \Leftrightarrow B = \frac{35}{2}$$

$$\frac{2x^3 - 14x^2 + 14x + 30}{x^2 - 4} = 2x - 14 + \frac{\frac{9}{2}}{(x - 2)} + \frac{\frac{35}{2}}{(x + 2)}$$

## 5. Schritt Integration

$$\begin{aligned}
 & \int 2x - 14 + \frac{9}{x-2} + \frac{35}{x+2} dx \\
 &= 2 \cdot \int x dx - 14 \cdot \int 1 dx + \frac{9}{2} \cdot \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{35}{2} \cdot \int \frac{1}{x+2} dx \\
 &= x^2 - 14x + \frac{9}{2} \cdot \ln(|x-2|) + \frac{35}{2} \cdot \ln(|x+2|) + c
 \end{aligned}$$

Anmerkung:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c$$

$\ln(-x)$ , falls  $x < 0$

$$\frac{d}{dx} \ln(|x|) = \ln(-x) \Rightarrow \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

$$\text{z.B. } \int_{-5}^{-2} \frac{1}{x} dx = \ln(|-x|) \Big|_{-5}^{-2} = \ln(-x) \Big|_{-5}^{-2} = \ln(2) - \ln(5)$$

Beispiel:

$$\int \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx$$

Schritt 2:

$$(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) : (x-1) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$$\begin{array}{r}
 -x^3 - x^2 \\
 \underline{\phantom{-} -4x^2 + 8x - 4} \\
 - \quad -4x^2 + 4x \\
 \underline{\phantom{-} \phantom{4x} - 4} \\
 \phantom{-} \phantom{4x} - 4 \\
 - \quad \phantom{4x} - 4 \\
 \underline{\phantom{-} \phantom{4x} \phantom{-} 0} \\
 0
 \end{array}$$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1) \cdot (x-2)^2 \rightarrow \text{Vielfachheit 2 beachten!!}$$

Schritt 3:

$$\frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \Bigg| \cdot \text{Nenner}$$

Anmerkung: Falls im Nenner-Polynom eine Nullstelle  $x_0$  mit der Vielfachheit  $n$  auftritt, treten in der Partialbruchzerlegung die Summanden

$$\frac{A_1}{x-x_0}, \frac{A_2}{(x-x_0)^2}, \dots, \frac{A_n}{(x-x_0)^n} \text{ auf.}$$

Schritt 4:

$$x+1 = A \cdot (x-2)^2 + B \cdot (x-1) \cdot (x-2) + C \cdot (x-1)$$

Nullstellen einsetzen:

$$x=1: 2 = A$$

$$x=2: 3 = C$$

$$x=0: 1 = 4A + 2B - C$$

$$1 = 8 + 2B - 3 \Rightarrow B = -2$$

$$\frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{2}{x-1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$$

Schritt 5:

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} &= 2 \cdot \int \frac{1}{x-1} dx - 2 \cdot \int \frac{2}{x-2} dx + 3 \cdot \int \frac{1}{(x-2)^2} dx \\ &= 2 \cdot \ln(|x-1|) - 2 \cdot \ln(|x-2|) + 3 \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c \\ &= \ln(x-1)^2 - \ln(x-2)^2 - \frac{3}{x-2} + c \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\int_2^3 \frac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 4}{x^6 + 4x^4 + 4x^2} dx = ?$$

Schritt 2:

$$\begin{aligned}x^6 + 4x^4 + 4x^2 &= x^2(x^4 + 4x^2 + 4) \quad \text{SUB: } z = x^2 \\ \Rightarrow z^2 + 4z + 4 &= 0 \Rightarrow z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-4} = -2 \\ \Rightarrow z^2 + 4z + 4 &= (z+2)^2 \Rightarrow (x^2+2)^2 \\ \Rightarrow x^6 + 4x^4 + 4x^2 &= x^2 \cdot (x^2+2)^2\end{aligned}$$

Schritt 3:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 4}{x^6 + 4x^4 + 4x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^2}$$

Schritt 4:

$$\begin{aligned}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 4 &= Ax \cdot (x^2+2)^2 + B \cdot (x^2+2)^2 + (Cx+D) \cdot x^2 \cdot (x^2+2) + (Ex+F) \cdot x^2 \\ &= Ax \cdot (x^4 + 4x^2 + 4) + B \cdot (x^4 + 4x^2 + 4) + (Cx+D) \cdot (x^4 + 4x^2 + 4) + Ex^3 + Fx^2 \\ &= Ax^5 + Ax^3 + 4Ax + Bx^4 + 4Bx^2 + 4B + Cx^5 + Dx^4 + 2Cx^3 + 2Dx^2 + Ex^3 + Fx^2 \\ &= (A+C) \cdot x^5 + (B+D) \cdot x^4 + (4A+2C+E) \cdot x^3 + (4B+2D+F) \cdot x^2 + 4Ax + 4B\end{aligned}$$

Koeffizienten-Vergleich:

$$\begin{aligned}A + C &= 0 \Rightarrow C = 0 \\ B + D &= 1 \Rightarrow D = 0 \\ 4A + 2C + E &= -2 \Rightarrow E = -2 \\ 4B + 2D + F &= 4 \Rightarrow F = 0 \\ 4A &= 0 \Rightarrow A = 0 \\ 4B &= 4 \Rightarrow B = 1\end{aligned}$$

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 4}{x^6 + 4x^4 + 4x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{2x}{(x^2+2)^2}$$

Schritt 5:

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{1}{x^2} - \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx &= \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx - \int_2^3 \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_2^3 - \int_6^{11} \frac{1}{y^2} dy \quad (\text{SUB: } y = x^2 + 2) \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{y} \Big|_6^{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} = \frac{1}{11}\end{aligned}$$

Hilfsfunktionen:

$$(\tan(x))' = \left( \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\cos^2(x) - \sin(x) \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$\tan(\arctan(x)) = x$$

$$(1 + \tan^2(\arctan(x))) \cdot \arctan'(x) = 1$$

$$(1 + x^2) \cdot \arctan'(x) = 1$$

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Beispiel:

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = ?$$

Suche der Nullstellen:

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \notin \mathbb{R}$$

Integration:

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{1}{x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \int \frac{1}{\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)} dx$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx$$

$$\text{SUB: } y = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dy$$

$$= \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{4}{3} \cdot \int \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} dy = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \int \frac{1}{1+y^2} dy$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \arctan(y) + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c$$