5. Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher

5.1 Gebietsintegrale für Funktionen mit zwei Veränderlichen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion von zwei Veränderlichen mit $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in D$. Ferner sei D beschränkt, d.h. in einem genügend großem Rechteck enthalten.

$$D \leq [a,b] \times [c,d]$$

f wird auf $[a,b] \times [c,d]$ fortgesetzt durch $f(x,y) = 0$, falls

$$(x, y) \in ([a,b] \times [c,d]) \setminus \{D\}$$

Volumen einer Säule:

$$V_{xy} = f(z_i, u_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

Volumen V zwischen den Graphen von f und der x, y - Ebene ist

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(z_i, u_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

Definition:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(z_i, u_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

heißt Riemann'sche Summe zur Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$$

und Zwischenpunkte $z_1, \ldots, z_n; u_1, \ldots, u_m$

$$V = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(z_i, u_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

Definition:
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ beschränkt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(z_i, u_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

falls der Grenzwert existiert. Dies ist z.B. der Fall, wenn D von endlich vielen stetig-differenzierbaren Funktionen berandet wird.

Berechnung von Gebietsintegralen:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(z_i,u_j\right)\cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} f\left(z_1,u_j\right)\cdot \Delta x_1 \cdot \Delta y_j + \ldots + \sum_{j=1}^{m} f\left(z_i,u_j\right)\cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j + \ldots + \sum_{j=1}^{m} f\left(z_n,u_j\right)\cdot \Delta x_n \cdot \Delta y_j$$

Das Volumen der i-ten Scheibe ist

$$V_i \approx \Delta x_i \cdot \sum_{j=1}^{m} f\left(z_i,u_j\right)\cdot \Delta y_j \xrightarrow[\Delta y_j \to 0]{} \Delta x_i \cdot \int_{\underline{y}(z_i)}^{\overline{y}(z_i)} f\left(z_i,y\right)dy$$