Sei $V_i$ das Volumen der i-ten Scheibe $S_i$

$$V_i \approx \Delta x_i \cdot \sum_{j=1}^{m} f\left(z_i, u_j\right) \cdot \Delta y_j$$

$$V \approx \Delta x_i \cdot \sum_{j=1}^{m} f\left(z_i, u_j\right) \cdot \Delta y_j \xrightarrow[\Delta y_j \to 0]{} \Delta x_i \cdot \int_{\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} f\left(z_i, y\right) dy$$

$$F\left(x, y\right) := \int_{\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} f\left(x, y\right) dy$$

$$V_i = F\left(z_i\right) \cdot \Delta x_i$$

Das Volumen V zwischen dem Graphen der Funktion $z = f\left(x, y\right)$ und der x-y-Ebene ist

$$V \approx V_1 + V_2 + \ldots + V_n = \sum_{i=1}^{n} F\left(z_i\right) \cdot \Delta x_i \xrightarrow[\Delta x_i \to 0]{} \int_a^b F\left(x\right) dx$$

$$\Rightarrow \iint_D f\left(x, y\right) dxdy = V = \int_a^b \left( \int_{\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} f\left(x, y\right) dy \right) dx$$

Definition:

(1) Eine Teilmenge D von $\mathbb{R}^2$ heißt y-projezierbar, wenn es zwei stetige Funktionen $\underline{y}\left(x\right)$ und $\overline{y}\left(x\right)$ gibt, sodass $D = \left\{\left(x, y\right) \mid a \le x \le b \text{ und } \underline{y}\left(x\right) \le y \le \overline{y}\left(x\right)\right\}$.

(2) Eine Teilmenge D von $\mathbb{R}^2$ heißt x-projezierbar, wenn es zwei stetige Funktionen $\underline{x}\left(y\right)$ und $\overline{x}\left(y\right)$ gibt, sodass $D = \left\{\left(x, y\right) \mid c \le y \le d \text{ und } \underline{x}\left(y\right) \le x \le \overline{x}\left(y\right)\right\}$.

(3) Eine Teilmenge D von $\mathbb{R}^2$ heißt projezierbar, wenn sie x- oder y-projezierbar ist

(4) Eine Teilmenge D von $\mathbb{R}^2$ heißt Standardmenge, wenn die sowohl x- als auch y-projezierbar ist.

Satz:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ projezierbar und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, dann existiert das Gebietsintegral $\iint_D f\left(x, y\right) dxdy$ und es gilt:

(1) $\iint_D f\left(x, y\right) dxdy = \int_a^b \left( \int_{\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} f\left(x, y\right) dy \right) dx$ wenn D y-projezierbar ist

(2) $\iint_D f\left(x, y\right) dxdy = \int_c^d \left( \int_{\underline{x}(y)}^{\overline{x}(y)} f\left(x, y\right) dx \right) dy$ wenn D x-projezierbar ist

(3) $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left( \int\limits_{\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$ oder $\int\limits_c^d \left( \int\limits_{\underline{x}(y)}^{\overline{x}(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$

wenn D eine Standardmenge ist.

Beispiele:

(1)

$$f: D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x + y$$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy &= \int\limits_0^1 \left( \int\limits_{x^2}^{x} (x+y)\,dy \right) dx \\
&= \int\limits_0^1 \left( x \cdot y + \frac{y^2}{2} \bigg|_{x^2}^{x} \right) dx = \int\limits_0^1 \left( x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx \\
&= \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{10}{20} - \frac{5}{20} - \frac{2}{20} = \frac{3}{20}
\end{aligned}$$

(2) Zwei Zylinder $Z_1$ und $Z_2$ schneiden sich. Wie groß ist das Volumen des Bereichs, der zu beiden Zylindern gehört?

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1 \right\} \\
Z_2 &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \le 1 \right\}
\end{aligned}$$

Gesucht ist das Volumen V von

$$\begin{aligned}
Z_1 \cap Z_2 &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1 \; und \; x^2 + z^2 \le 1 \right\} \\
D &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1 \; und \; x \ge 0, y \ge 0 \right\} \\
\frac{1}{8} V &= \iint\limits_D \sqrt{1-x^2}\,dxdy \\
&= \int\limits_0^1 \left( \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\,dy \right) dx \\
&= \int\limits_0^1 \left( \sqrt{1-x^2} \cdot y \bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int\limits_0^1 1 - x^2\,dx \\
&= x - \frac{x^3}{3} \bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\
V &= 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

(3)

$$\int_0^1 \left( \int_y^1 \frac{\sin(x)}{x} dx \right) dy = ?$$

$$= \iint_D \frac{\sin(x)}{x} dxdy$$

$$= \int_0^1 \left( \int_0^x \frac{\sin(x)}{x} dy \right) dx = \int_0^1 \left( \frac{\sin(x)}{x} \cdot y \Big|_0^x \right) dx$$

$$= \int_0^1 \sin(x) dx = -\cos(x)\Big|_0^1 = 1 - \cos(1)$$