Beispiel: Schwerpunkt einer ebenen Schicht

zweiseitiger Hebel im Gleichgewicht $\Leftrightarrow m_1 \cdot (x_1 - a) + m_2 \cdot (x_2 - a) = 0$

Gleichgeweicht für n Massen $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} m_1 \cdot (x_1 - a) = 0$

Kontinuierliche ebene Massenverteilung mit der Dichte $\rho = \rho(x, y)$

Drehmoment M_L bzgl. L

$$M_i \approx \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (z_i - q); \quad m_i = \sum_{j=1}^{m} m_{ij} \approx \sum_{j=1}^{m} \rho(z_i, u_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

$$\rho(z_i, u_j) \approx \frac{m_{ij}}{\Delta x_i \cdot \Delta y_j}$$

$$M_L \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \rho(z_i, u_j) \cdot (z_i - q) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j \xrightarrow[\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}]{} \iint_D \rho(x, y) \cdot (x - q)\, dxdy$$

L heißt Schwerelinie, wenn $M_L = 0$ ist.

$$0 = \iint_D \rho(x, y) \cdot x - \rho(x, y) \cdot q \, dxdy = \iint_D \rho(x, y) \cdot x \; dxdy - q \cdot \iint_D \rho(x, y)\, dxdy$$

$$\boxed{q = \frac{\iint_D \rho(x, y) \cdot x \; dxdy}{\iint_D \rho(x, y)\, dxdy}} \qquad \boxed{p = \frac{\iint_D \rho(x, y) \cdot y \; dxdy}{\iint_D \rho(x, y)\, dxdy}}$$

Schwerpunkt der ebenen Schicht $S = (q, p)$.

Beispiel:

Gesucht ist der Schwerpunkt eines Halbkreises vom Radius r mit einer homogenen Massenverteilung $\rho = const.$

Aus Symmetriegründen ist $q = 0$.

$$\iint_D y \cdot \rho(x, y)\, dxdy = \rho \cdot \int_{-r}^{r} \left(\int_{0}^{\sqrt{r^2 - x^2}} y \; dy \right) dx$$

$$= \rho \cdot \int_{-r}^{r} \left(\frac{y^2}{2} \Bigg|_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) dx = \rho \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \rho \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \Bigg|_{-r}^{r} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} r^3 = \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot r^3$$

$$\iint_D \rho(x, y)\, dxdy = \rho \cdot \iint_D dxdy = \rho \cdot \frac{\pi}{2} \cdot r^2$$

$$p = \frac{\frac{2}{3} \cdot \rho \cdot r^3}{\rho \cdot \frac{\pi}{2} \cdot r^2} = \frac{4r}{3\pi} \approx 0,44r$$

Berechnung von Gebietsintegralen durch Einführung von Polarkoordinaten

Die Koordinaten r, φ heißen die Polarkoordinaten des Punktes P.

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{r} \qquad \sin(\varphi) = \frac{y}{r}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\varphi) \\ y &= r \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}}$$

$$\Delta\varphi_j = \varphi_j - \varphi_{j-1}$$

$$\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$$

$$\begin{aligned} \Delta A_{ij} &= \frac{r_i^2}{2} \cdot \Delta\varphi_j - \frac{(r_i - 1)^2}{2} \cdot \Delta\varphi_j \\ &= \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \cdot (r_i - r_{i-1}) \cdot \Delta\varphi_j \\ &= \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \cdot \Delta r_i \cdot \Delta\varphi_j \end{aligned}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f\left(v_i \cdot \cos(w_j), v_i \cdot \sin(w_j)\right) \cdot \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \cdot \Delta r_i \cdot \Delta\varphi_j$$

$$\xrightarrow[\substack{\Delta r_i \to 0 \\ \Delta\varphi_j \to 0}]{} \int_{r_0}^{R} \left(\int_{\underline{\varphi}(r)}^{\overline{\varphi}(r)} f\left(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)\right) \cdot r \; d\varphi \right) dr$$

$$\boxed{\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,dxdy &= \int_{r_0}^{R} \left(\int_{\underline{\varphi}(r)}^{\overline{\varphi}(r)} f\left(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)\right) \cdot r \; d\varphi \right) dr \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\underline{r}(\varphi)}^{\overline{r}(\varphi)} f\left(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)\right) \cdot r \; dr \right) d\varphi \end{aligned}}$$

Beispiel:

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy = ?$$

$$D = \left\{ (r, \varphi) \,|\, 1 \le r \le 2 \; und \; 0 \le \varphi \le \pi \right\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy &= \int_1^2 \left(\int_0^{\pi} e^{r^2} \cdot r \; d\varphi \right) dr \qquad \left(x^2 + y^2 = r^2 \right) \\ &= \int_1^2 e^{r^2} \cdot r \cdot \varphi \Big|_0^{\pi} dr = \pi \cdot \int_1^2 r \cdot e^{r^2} dr \qquad \left(SUB: s := r^2 \quad \frac{ds}{dr} = 2r \right) \\ &= \pi \cdot \int_1^4 r \cdot e^s \cdot \frac{ds}{2r} = \frac{\pi}{2} \cdot \int_1^4 e^s ds = \frac{\pi}{2} \cdot e^s \Big|_1^4 = \frac{\pi}{2} \cdot \left(e^4 - e\right) \end{aligned}$$

Beispiel: Berechnung von $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

$$K_r = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0\right\}$$
$$Q_r = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le R, 0\le y\le R\right\}$$
$$K_{\sqrt{2}\cdot R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 2R^2, x\ge 0, y\ge 0\right\}$$

Einführung von Polarkoordinaten

$$\iint_{K_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^R e^{-r^2}\cdot r\ dr\right)d\varphi \qquad \left(SUB: s := -r^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{-R^2} e^{-r^2}\ ds\right)d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^s\Big|_{-R^2}^0\ d\varphi$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-e^{-R^2}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\left(1-e^{-R^2}\right)\cdot\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$\iint_{K_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \frac{\pi}{4}\cdot\left(1-e^{-R^2}\right)$$
$$\iint_{K_{\sqrt{2}\cdot R}} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \frac{\pi}{4}\cdot\left(1-e^{-2R^2}\right)$$

$$\iint_{Q_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \int_0^R\left(\int_0^R e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dy\right)dx = \int_0^R e^{-x^2}\left(\int_0^R e^{-y^2}dy\right)dx$$
$$\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)\cdot\left(\int_0^R e^{-y^2}dy\right) = \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$$

$$\iint_{K_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy \le \iint_{Q_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy \le \iint_{K_{\sqrt{2}\cdot R}} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$
$$\frac{\pi}{4}\cdot\left(1-e^{-R^2}\right) \le \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 \le \frac{\pi}{4}\cdot\left(1-e^{-2R^2}\right)$$
$$\xrightarrow[R\to\infty]{} \quad \frac{\pi}{4} \le \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 \le \frac{\pi}{4}$$
$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4} \quad\to\quad \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Umschreiben von Gebieten des $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ \underline{y}(x)\le y\le \overline{y}(x)\right\}$$
$$D = \left\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \mid \alpha\le\varphi\le\beta,\ \underline{r}(\varphi)\le r\le \overline{r}(\varphi)\right\}$$