

Beispiel: Schwerpunkt einer ebenen Schicht

zweiseitiger Hebel im Gleichgewicht  $\Leftrightarrow m_1 \cdot (x_1 - a) + m_2 \cdot (x_2 - a) = 0$

Gleichgewicht für n Massen  $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - a) = 0$

Kontinuierliche ebene Massenverteilung mit der Dichte  $\rho = \rho(x, y)$

Drehmoment  $M_L$  bzgl. L

$$M_i \approx \sum_{i=1}^n m_i \cdot (z_i - q); \quad m_i = \sum_{j=1}^m m_{ij} \approx \sum_{j=1}^m \rho(z_i, u_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

$$\rho(z_i, u_j) \approx \frac{m_{ij}}{\Delta x_i \cdot \Delta y_j}$$

$$M_L \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \rho(z_i, u_j) \cdot (z_i - q) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j \xrightarrow[\Delta y_j \rightarrow 0]{\Delta x_i \rightarrow 0} \iint_D \rho(x, y) \cdot (x - q) dx dy$$

L heißt Schwerelinie, wenn  $M_L = 0$  ist.

$$0 = \iint_D \rho(x, y) \cdot x - \rho(x, y) \cdot q dx dy = \iint_D \rho(x, y) \cdot x dx dy - q \cdot \iint_D \rho(x, y) dx dy$$

$$q = \frac{\iint_D \rho(x, y) \cdot x dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}$$

$$p = \frac{\iint_D \rho(x, y) \cdot y dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}$$

Schwerpunkt der ebenen Schicht  $S = (q, p)$ .

Beispiel:

Gesucht ist der Schwerpunkt eines Halbkreises vom Radius r mit einer homogenen Massenverteilung  $\rho = \text{const.}$

Aus Symmetriegründen ist  $q = 0$ .

$$\begin{aligned} \iint_D y \cdot \rho(x, y) dx dy &= \rho \cdot \int_{-r}^r \left( \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y dy \right) dx \\ &= \rho \cdot \int_{-r}^r \left( \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \right) dx = \rho \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \frac{1}{2} \cdot \rho \left( r^2 x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-r}^r \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left( r^3 - \frac{r^3}{3} - \left( -r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} r^3 = \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot r^3 \end{aligned}$$

$$\iint_D \rho(x, y) dx dy = \rho \cdot \iint_D dx dy = \rho \cdot \frac{\pi}{2} \cdot r^2$$

$$p = \frac{\frac{2}{3} \cdot \rho \cdot r^3}{\rho \cdot \frac{\pi}{2} \cdot r^2} = \frac{4r}{3\pi} \approx 0,44r$$

## Berechnung von Gebietsintegralen durch Einführung von Polarkoordinaten

Die Koordinaten  $r, \varphi$  heißen die Polarkoordinaten des Punktes P.

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{r} \quad \sin(\varphi) = \frac{y}{r}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\varphi) \\ y &= r \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}}$$

$$\Delta\varphi_j = \varphi_j - \varphi_{j-1}$$

$$\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$$

$$\Delta A_{ij} = \frac{r_i^2}{2} \cdot \Delta\varphi_j - \frac{(r_{i-1})^2}{2} \cdot \Delta\varphi_j$$

$$= \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \cdot (r_i - r_{i-1}) \cdot \Delta\varphi_j$$

$$= \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \cdot \Delta r_i \cdot \Delta\varphi_j$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(v_i \cdot \cos(w_j), v_i \cdot \sin(w_j)) \cdot \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \cdot \Delta r_i \cdot \Delta\varphi_j$$

$$\xrightarrow[\Delta\varphi_j \rightarrow 0]{\Delta r_i \rightarrow 0} \int_{r_0}^R \left( \int_{\varphi(r)}^{\bar{\varphi}(r)} f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) \cdot r d\varphi \right) dr$$

$$\boxed{\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_{r_0}^R \left( \int_{\varphi(r)}^{\bar{\varphi}(r)} f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) \cdot r d\varphi \right) dr \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_{r(\varphi)}^{\bar{r}(\varphi)} f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) \cdot r dr \right) d\varphi \end{aligned}}$$

Beispiel:

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = ?$$

$$D = \{(r, \varphi) \mid 1 \leq r \leq 2 \text{ und } 0 \leq \varphi \leq \pi\}$$

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \int_1^2 \left( \int_0^\pi e^{r^2} \cdot r d\varphi \right) dr \quad (x^2 + y^2 = r^2)$$

$$= \int_1^2 e^{r^2} \cdot r \cdot \varphi \Big|_0^\pi dr = \pi \cdot \int_1^2 r \cdot e^{r^2} dr \quad \left( \text{SUB: } s := r^2 \quad \frac{ds}{dr} = 2r \right)$$

$$= \pi \cdot \int_1^4 r \cdot e^s \cdot \frac{ds}{2r} = \frac{\pi}{2} \cdot \int_1^4 e^s ds = \frac{\pi}{2} \cdot e^s \Big|_1^4 = \frac{\pi}{2} \cdot (e^4 - e)$$

Beispiel: Berechnung von  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

$$K_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$Q_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\}$$

$$K_{\sqrt{2} \cdot R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Einführung von Polarkoordinaten

$$\iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^R e^{-r^2} \cdot r dr \right) d\varphi \quad (\text{SUB: } s := -r^2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{-R^2} e^{-r^2} ds \right) d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^s \Big|_{-R^2}^0 d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - e^{-R^2}) d\varphi = \frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-R^2}) \cdot \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4} \cdot (1 - e^{-R^2})$$

$$\iint_{K_{\sqrt{2} \cdot R}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4} \cdot (1 - e^{-2R^2})$$

$$\iint_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^R \left( \int_0^R e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dy \right) dx = \int_0^R e^{-x^2} \left( \int_0^R e^{-y^2} dy \right) dx$$

$$\left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right) \cdot \left( \int_0^R e^{-y^2} dy \right) = \left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2$$

$$\iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{K_{\sqrt{2} \cdot R}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot (1 - e^{-R^2}) \leq \left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4} \cdot (1 - e^{-2R^2})$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} \leq \left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\left( \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4} \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Umschreiben von Gebieten des  $\mathbb{R}^2$  in Polarkoordinaten

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \underline{y}(x) \leq y \leq \bar{y}(x)\}$$

$$D = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \leq \varphi \leq \beta, \underline{r}(\varphi) \leq r \leq \bar{r}(\varphi)\}$$