5.2 Integralrechnung für Funktionen mit drei Veränderlichen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte Menge und $f: D \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Für D gibt es einen Quader $[q,r]\times[s,t]\times[u,v]$ der D ganz enthält. Sei $f(x,y,z)=0$ für alle $(x,y,z)\in([q,r]\times[s,t]\times[u,v])\setminus D$.

Dann heißt

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(r_i,t_j,v_k)\cdot\Delta x_i\cdot\Delta y_j\cdot\Delta z_k$$

eine Riemann'sche Summe von f zur Zerlegung
$q=x_0<x_1<\ldots<x_n=r, s=y_0<y_1<\ldots<y_n=t, u=z_0<z_1<\ldots<z_n=v$ und der Wahl der Zwischenpunkte (r_i,t_j,v_k) mit $x_{i-1}\le r_i\le x_i, y_{j-1}\le t_j\le y_j, z_{k-1}\le v_k\le z_k$

Streben die Riemann'schen Summen für immer feiner werdende Zerlegungen $(\Delta x_i\to 0,\Delta y_j\to 0,\Delta z_k\to 0)$ und für jede Wahl von Zwischenpunkten einem gemeinsamen Grenzwert S zu, so heißt f integrierbar auf D und S heißt das (dreidimensionale) Gebietsintegral.

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz=\lim_{\substack{\Delta x_i\to 0\\ \Delta y_j\to 0\\ \Delta z_k\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(r_i,t_j,v_k)\cdot\Delta x_i\cdot\Delta y_j\cdot\Delta z_k$$

Berechnung dreidimensionaler Gebietsintegrale
Sei D_z eine projezierbare Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und seien $\underline{z}(x,y)$ und $\overline{z}(x,y)$ zwei Funktionen auf D_z mit $\underline{z}(x,y)\le\overline{z}(x,y)$, sodass

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D_z \ und \ \underline{z}(x,y)\le z\le\overline{z}(x,y)\right\}$$

Falls $\underline{z},\overline{z}, f: D\to\mathbb{R}$ stetige Funktionen sind, so existiert das Gebietsintegral über f und es gilt:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz=\iint_{D_z}\left(\int_{\underline{z}(x,y)}^{\overline{z}(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy$$

Die Formel kann auch so umgestellt werden, dass zunächst in x- oder y-Richtung integriert wird.

Beispiel: Tetraeder

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y,z\ge 0,\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\le 1\right\}$$

$$\iiint_D x\ dxdydz = \iint_{D_z}\left(\int_0^{c\cdot\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} x\,dz\right)dxdy = \iint_{D_z}\left(x\cdot z\Big|_0^{c\cdot\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}\right)dxdy = \iint_{D_z} x\cdot c\cdot\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dxdy$$

$$=\int_0^a\left(\int_0^{b\cdot\left(1-\frac{x}{a}\right)} c\cdot\left(x-\frac{x^2}{a}-\frac{x\cdot y}{b}\right)dy\right)dx = c\cdot\int_0^a\left(x\cdot y-\frac{x^2\cdot y}{a}-\frac{x\cdot y^2}{2b}\Big|_0^{b\cdot\left(1-\frac{x}{a}\right)}\right)dx$$

$$=c\cdot\int_0^a\left(x\cdot b\cdot\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{x^2\cdot b}{a}\cdot\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{x\cdot b}{2}\cdot\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\right)dx$$

$$=b\cdot c\cdot\int_0^a\left(x-\frac{x^2}{a}-\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{a^2}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{a}-\frac{x^3}{2a^2}\right)dx$$

$$=b\cdot c\cdot\int_0^a\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{2a^2}\right)dx = b\cdot c\cdot\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3a}+\frac{x^4}{8a^2}\Big|_0^a\right) = b\cdot c\cdot\left(\frac{a^2}{4}-\frac{a^3}{3a}+\frac{a^4}{8a^2}\right)$$

$$=a^2\cdot b\cdot c\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)=\frac{a^2\cdot b\cdot c}{24}$$

Insbesondere ist

$$\iiint_D 1\ dxdydz$$

das Volumen von D.

Transformation auf Zylinderkoordinaten

$$x = r\cdot\cos(\varphi), \qquad y = r\cdot\sin(\varphi), \qquad z = z$$

Volumenelement $dxdydz$ wird transformiert in $r\cdot drd\varphi dz$.

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_G f\left(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi), z\right)\cdot r\cdot drd\varphi dz}$$

Beispiel:

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1\le x^2+y^2\le e^2, x\ge 0, y\ge 0, 0\le z\le 4\right\}$$

$$G=\left\{(r,\varphi,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1\le r\le e, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le z\le 4\right\}$$

$$\iiint_D z\cdot\frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}dxdydz=\iiint_G z\cdot\frac{\ln\left(r^2\right)}{r^2}\cdot r\ drd\varphi dz=\iint_{D_z}\left(\int_0^4 z\cdot\frac{\ln\left(r^2\right)}{r}dz\right)d\varphi dr$$

$$=\iint_{D_z}\left(\frac{1}{2}\cdot z^2\cdot\frac{\ln\left(r^2\right)}{r}\Bigg|_0^4\right)d\varphi dr=8\cdot\iint_{D_z}\frac{2\ln(r)}{r}d\varphi dr=16\cdot\int_1^e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(r)}{r}d\varphi\right)dr$$

$$=16\cdot\int_1^e\frac{\ln(r)}{r}\cdot\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}dr=8\pi\cdot\int_1^e\frac{\ln(r)}{r}dr$$

$$SUB:\ \ u=\ln(r),\quad \frac{du}{dr}=\frac{1}{r}$$

$$=8\pi\cdot\int_{\ln(1)}^{\ln(e)}u\ du=4\pi\cdot u^2\Big|_0^1=4\pi$$

Transformation auf Kugelkoordinaten:

$$x=r\cdot\cos(\varphi)=R\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\vartheta)$$
$$y=r\cdot\sin(\varphi)=R\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\vartheta)$$
$$z=R\cdot\cos(\vartheta)$$

Volumenelement $dxdydz$ wird transformiert in das Volumenelement

$$dF\cdot dR=\left(R\cdot d\vartheta\cdot R\cdot\sin(\vartheta)\cdot d\varphi\right)\cdot dR$$
$$=R^2\cdot\sin(\vartheta)\cdot d\vartheta\cdot d\varphi\cdot dR$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz\\&=\iiint_G f\left(R\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\vartheta),R\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\vartheta),R\cdot\cos(\vartheta)\right)\cdot R^2\cdot\sin(\vartheta)\ \ d\vartheta d\varphi dR\end{aligned}}$$

Beispiel:
Sei D die Viertelkugel $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid y\geq 0,z\geq 0,x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$. Die Dichte von D nehme linear mit der Höhe z ab von $7\frac{g}{cm^3}$ für z = 0 bis $3\frac{g}{cm^3}$ für z = 1. Berechne die Masse von D.

$$\rho(x,y,z)=\rho(z)=a+bz$$
$$\rho(0)=7=a,\quad \rho(1)=3=7+b\Rightarrow b=-4$$
$$\rho(x,y,z)=7-4z$$
$$G=\left\{(R,\varphi,\vartheta)\in\mathbb{R}^3\mid 0\leq r\leq 1,0\leq\varphi\leq\pi,0\leq\vartheta\leq\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\iiint_D \rho(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_G 7-4\left(r\cdot\cos(\vartheta)\right)\cdot R^2\cdot\sin(\vartheta)\;d\vartheta d\varphi dR$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 7\cdot R^2\cdot\sin(\vartheta)-4\cdot R^3\cdot\sin(\vartheta)\cdot\cos(\vartheta)\,d\vartheta\right)d\varphi\right)dr$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 7\cdot R^2\cdot\sin(\vartheta)-2\cdot R^3\cdot\sin(2\vartheta)\,d\vartheta\right)d\varphi\right)dr$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{\pi}\left(-7\cdot R^2\cdot\cos(\vartheta)+2\cdot R^3\cdot\cos(2\vartheta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)d\varphi\right)dr$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{\pi}-R^3+7\cdot R^2-R^3 d\varphi\right)dr = \int_0^1\left(\int_0^{\pi}-2\cdot R^3+7\cdot R^2 d\varphi\right)dr$$

$$= \int_0^1 -2\cdot R^3\varphi+7\cdot R^2\varphi\Big|_0^{\pi}\;dr = \pi\cdot\int_0^1 7\cdot R^2-2\cdot R^3\;dr$$

$$= \pi\cdot\left(\frac{7}{3}\cdot R^3-\frac{1}{2}\cdot R^4\Big|_0^1\right) = \pi\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\right) = \pi\cdot\frac{11}{6}\approx 5,26g$$

Formel für die Koordinaten des Schwerpunktes eines Körpers mit dem Volumen V und der Dichte $\rho(x,y,z)$.

Gesamtmasse:

$$M = \iiint_V \rho(x,y,z)\,dxdydz$$

Schwerpunktskoordinaten:

$$\boxed{\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{M}\cdot\iiint_V x\cdot\rho(x,y,z)\,dxdydz \\ y_S &= \frac{1}{M}\cdot\iiint_V y\cdot\rho(x,y,z)\,dxdydz \\ z_S &= \frac{1}{M}\cdot\iiint_V z\cdot\rho(x,y,z)\,dxdydz \end{aligned}}$$