

5.2 Integralrechnung für Funktionen mit drei Veränderlichen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Für D gibt es einen Quader $[q, r] \times [s, t] \times [u, v]$ der D ganz enthält. Sei $f(x, y, z) = 0$ für alle $(x, y, z) \in ([q, r] \times [s, t] \times [u, v]) \setminus D$.

Dann heißt

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(r_i, t_j, v_k) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$$

eine Riemann'sche Summe von f zur Zerlegung

$q = x_0 < x_1 < \dots < x_n = r, s = y_0 < y_1 < \dots < y_m = t, u = z_0 < z_1 < \dots < z_l = v$ und der Wahl der Zwischenpunkte (r_i, t_j, v_k) mit $x_{i-1} \leq r_i \leq x_i, y_{j-1} \leq t_j \leq y_j, z_{k-1} \leq v_k \leq z_k$

Streben die Riemann'schen Summen für immer feiner werdende Zerlegungen

$(\Delta x_i \rightarrow 0, \Delta y_j \rightarrow 0, \Delta z_k \rightarrow 0)$ und für jede Wahl von Zwischenpunkten einem gemeinsamen Grenzwert S zu, so heißt f integrierbar auf D und S heißt das (dreidimensionale) Gebietsintegral.

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_j \rightarrow 0 \\ \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(r_i, t_j, v_k) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$$

Berechnung dreidimensionaler Gebietsintegrale

Sei D_z eine projizierbare Teilmenge des \mathbb{R}^2 und seien $\underline{z}(x, y)$ und $\bar{z}(x, y)$ zwei Funktionen auf D_z mit $\underline{z}(x, y) \leq \bar{z}(x, y)$, sodass

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_z \text{ und } \underline{z}(x, y) \leq z \leq \bar{z}(x, y)\}$$

Falls $\underline{z}, \bar{z}, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind, so existiert das Gebietsintegral über f und es gilt:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_z} \left(\int_{\underline{z}(x, y)}^{\bar{z}(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

Die Formel kann auch so umgestellt werden, dass zunächst in x - oder y -Richtung integriert wird.

Beispiel: Tetraeder

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1 \right\}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_D x \, dx dy dz &= \iint_{D_z} \left(\int_0^{c \cdot \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)} x \, dz \right) dx dy = \iint_{D_z} \left(x \cdot z \Big|_0^{c \cdot \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)} \right) dx dy = \iint_{D_z} x \cdot c \cdot \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dx dy \\
&= \int_0^a \left(\int_0^{b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)} c \cdot \left(x - \frac{x^2}{a} - \frac{x \cdot y}{b}\right) dy \right) dx = c \cdot \int_0^a \left(x \cdot y - \frac{x^2 \cdot y}{a} - \frac{x \cdot y^2}{2b} \Big|_0^{b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)} \right) dx \\
&= c \cdot \int_0^a \left(x \cdot b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{x^2 \cdot b}{a} \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{x \cdot b}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \right) dx \\
&= b \cdot c \cdot \int_0^a \left(x - \frac{x^2}{a} - \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{2a^2} \right) dx \\
&= b \cdot c \cdot \int_0^a \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{2a^2} \right) dx = b \cdot c \cdot \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3a} + \frac{x^4}{8a^2} \Big|_0^a \right) = b \cdot c \cdot \left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^3}{3a} + \frac{a^4}{8a^2} \right) \\
&= a^2 \cdot b \cdot c \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \right) = \frac{a^2 \cdot b \cdot c}{24}
\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\iiint_D 1 \, dx dy dz$$

das Volumen von D.

Transformation auf Zylinderkoordinaten

$$x = r \cdot \cos(\varphi), \quad y = r \cdot \sin(\varphi), \quad z = z$$

Volumenelement $dx dy dz$ wird transformiert in $r \cdot dr d\varphi dz$.

$$\boxed{\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_G f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi), z) \cdot r \cdot dr d\varphi dz}$$

Beispiel:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4\}$$

$$G = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq r \leq e, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq 4\}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_D z \cdot \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy dz &= \iiint_G z \cdot \frac{\ln(r^2)}{r^2} \cdot r dr d\varphi dz = \iint_{D_z} \left(\int_0^4 z \cdot \frac{\ln(r^2)}{r} dz \right) d\varphi dr \\
&= \iint_{D_z} \left(\frac{1}{2} \cdot z^2 \cdot \frac{\ln(r^2)}{r} \Big|_0^4 \right) d\varphi dr = 8 \cdot \iint_{D_z} \frac{2 \ln(r)}{r} d\varphi dr = 16 \cdot \int_1^e \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(r)}{r} d\varphi \right) dr \\
&= 16 \cdot \int_1^e \frac{\ln(r)}{r} \cdot \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr = 8\pi \cdot \int_1^e \frac{\ln(r)}{r} dr \\
\text{SUB: } u &= \ln(r), \quad \frac{du}{dr} = \frac{1}{r} \\
&= 8\pi \cdot \int_{\ln(1)}^{\ln(e)} u du = 4\pi \cdot u^2 \Big|_0^1 = 4\pi
\end{aligned}$$

Transformation auf Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
x &= r \cdot \cos(\varphi) = R \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) \\
y &= r \cdot \sin(\varphi) = R \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) \\
z &= R \cdot \cos(\vartheta)
\end{aligned}$$

Volumenelement $dx dy dz$ wird transformiert in das Volumenelement

$$\begin{aligned}
dF \cdot dR &= (R \cdot d\vartheta \cdot R \cdot \sin(\vartheta) \cdot d\varphi) \cdot dR \\
&= R^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \cdot dR
\end{aligned}$$

$$\boxed{
\begin{aligned}
&\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \\
&= \iiint_G f(R \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\vartheta), R \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\vartheta), R \cdot \cos(\vartheta)) \cdot R^2 \cdot \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi dR
\end{aligned}
}$$

Beispiel:

Sei D die Viertelkugel $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Die Dichte von D

nehme linear mit der Höhe z ab von $7 \frac{g}{cm^3}$ für $z = 0$ bis $3 \frac{g}{cm^3}$ für $z = 1$. Berechne die Masse

von D.

$$\begin{aligned}
\rho(x, y, z) &= \rho(z) = a + bz \\
\rho(0) &= 7 = a, \quad \rho(1) = 3 = 7 + b \Rightarrow b = -4 \\
\rho(x, y, z) &= 7 - 4z
\end{aligned}$$

$$G = \left\{ (R, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_G 7 - 4(r \cdot \cos(\vartheta)) \cdot R^2 \cdot \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi dR \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 7 \cdot R^2 \cdot \sin(\vartheta) - 4 \cdot R^3 \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) d\vartheta \right) d\varphi \right) dr \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 7 \cdot R^2 \cdot \sin(\vartheta) - 2 \cdot R^3 \cdot \sin(2\vartheta) d\vartheta \right) d\varphi \right) dr \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(-7 \cdot R^2 \cdot \cos(\vartheta) + 2 \cdot R^3 \cdot \cos(2\vartheta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) d\varphi \right) dr \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(-R^3 + 7 \cdot R^2 - R^3 d\varphi \right) dr = \int_0^1 \left(\int_0^\pi -2 \cdot R^3 + 7 \cdot R^2 d\varphi \right) dr \right) \\
&= \int_0^1 -2 \cdot R^3 \varphi + 7 \cdot R^2 \varphi \Big|_0^\pi dr = \pi \cdot \int_0^1 7 \cdot R^2 - 2 \cdot R^3 dr \\
&= \pi \cdot \left(\frac{7}{3} \cdot R^3 - \frac{1}{2} \cdot R^4 \Big|_0^1 \right) = \pi \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{2} \right) = \pi \cdot \frac{11}{6} \approx 5,26g
\end{aligned}$$

Formel für die Koordinaten des Schwerpunktes eines Körpers mit dem Volumen V und der Dichte $\rho(x, y, z)$.

Gesamtmasse:

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Schwerpunktskoordinaten:

$x_s = \frac{1}{M} \cdot \iiint_V x \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$ $y_s = \frac{1}{M} \cdot \iiint_V y \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$ $z_s = \frac{1}{M} \cdot \iiint_V z \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$
