Tutorium Mathe 1 MT

II. Komplexe Zahlen:

Komplexe Gleichungen und ihre Lösungen:
Das Lösen einer komplexen Gleichung kann man zurückführen auf das Rechnen mit Polarkoordinaten. Sie erleichtern die Lösung einer komplexen Gleichung. Eine wichtige Feststellung hierbei ist, dass sich bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen auch die Beträge multiplizieren und die Argumente sich addieren ($\pm 2\pi$ *kann als Ausgleich auftreten*)

Daraus ergibt sich als Formel:

$$w \cdot z = |w| \cdot |z| \left(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\right)\left(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\right) = |w| \cdot |z| \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

Diese kann man nun für das Argument bei der Multiplikation in Polarkoordinaten in folgender Definition genauer angeben:

$$\arg(w \cdot z) = \begin{cases} \arg(w) + \arg(z), \ \textit{falls} \ \arg(w) + \arg(z) \in [0, 2\pi[\\ \arg(w) + \arg(z) + 2\pi, \ \textit{falls} \ \arg(w) + \arg(z) < 0 \\ \arg(w) + \arg(z) - 2\pi, \ \textit{falls} \ \arg(w) + \arg(z) \geq 2\pi \end{cases}$$

Diese Definition zeigt, wie man das Argument bei einer Multiplikation auf ein Intervall von 0°-360° $[0 - 2\pi[$ normieren kann. Denn ein Winkel, der größer als 360° ist entspricht immer einem Winkel, der sich wieder zwischen 0°-360° befindet. Daher macht es Sinn, eine Umdrehung (2π) hinzuzuaddieren oder abzuziehen, wenn ein Winkel nicht im Intervall $[0 - 2\pi[$ liegt, sodass nach jede berechnete Zahl wieder ein Argument aus dem Intervall $[0, 2\pi[$ hat.

Für die Division ergibt sich daraus entsprechend:

$$\arg\left(\frac{w}{z}\right) = \arg(w) - \arg(z) \qquad \textit{und} \qquad \left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$$

(Eventuell muss auch hier durch $\pm k \cdot 2\pi$ das Argument des Ergebnisses auf das Intervall $[0, 2\pi[$ normiert werden)

Für die Potenzierung gilt:

$$\arg(w^n) = n \cdot \arg(w) \qquad \textit{und} \qquad |w^n| = |w|^n$$

Aus diesen Formeln lassen sich Rückschlüsse auf die Lösungen einer komplexen Gleichung ziehen. Diese Lösungen liegen alle auf einem Lösungskreis in der komplexen Zahlenebene, haben daher auch alle denselben Betrag. Dies kann man aus der Betragsformel für die Potenzierung herleiten:

$$z^n = a \quad \Rightarrow |z^n| = |a| \ \Rightarrow \ |z|^n = |a| \ \Rightarrow |z| = \sqrt[n]{|a|}$$

Das bedeutet, dass alle Lösungen den gleichen Abstand zum Ursprung der komplexen Zahlenebene haben. Daraus kann man ableiten, dass ihre Beträge alle gleich dem Radius des Lösungskreises sind.

Für die Argrumente kann man die Formel entsprechend herleiten, wobei hier hinzukommt, dass man immer einen entsprechenden Winkelanteil vom Gesamtkreis hinzuaddieren muss, um zur nächsten Lösung zu kommen. Daraus folgt für das Argument der Lösungen:

$$\arg\left(z^n\right) = \arg(a) \;\;\Rightarrow\;\; n \cdot \arg(z) = \arg(a) \;\Rightarrow \arg(z) = \frac{\arg(a)}{n}$$

Der Anteil vom Gesamtkreis, der jeweils addiert wird, ergibt sich aus der Potenz der Gleichung. Er ist $\frac{k \cdot 2\pi}{n}$. Mit Hilfe der beiden Formeln für Beträge und Argumente der Lösungen lässt sich nun zusammenfassen, wie die Lösung einer komplexen Gleichung aussieht:

$$Gleichung:\; z^n = a$$

$$Betrag\;\; aller\;\; Lösungen:\; \left|c_k\right| = \sqrt[n]{|a|}$$

$$Argumente\;\; der\;\; Lösungen:\; \arg\left(c_k\right) = \frac{\arg(a) + k \cdot 2\pi}{n} \qquad mit\;\; k = \{0,1,\ldots,n-1\}$$

Beispiele:

(1)

$$z^3 = i \qquad |i| = 1 \qquad \arg(i) = \frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} 90°$$

$$\left|c_k\right| = 1 \qquad \arg\left(c_k\right) = \frac{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi}{3} \qquad mit\, k = \{0,1,2\}$$

$$c_1 = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 1 \cdot \left(\cos(30°) + i\sin(30°)\right) = \langle 1, 30° \rangle$$

$$c_2 = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 1 \cdot \left(\cos(150°) + i\sin(150°)\right) = \langle 1, 150° \rangle$$

$$c_3 = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 1 \cdot \left(\cos(270°) + i\sin(270°)\right) = \langle 1, 270° \rangle$$

(2)

$$z^4 = 16 \cdot e^{i160°} \qquad \left|16 \cdot e^{i160°}\right| = 16 \qquad \arg\left(16 \cdot e^{i160°}\right) = 160°$$

$$\left|c_k\right| = 16 \qquad \arg\left(c_k\right) = \frac{160° + k \cdot 360°}{4} \qquad mit\, k = \{0,1,2,3\}$$

$$c_1 = 16 \cdot \left(\cos(40°) + i\sin(40°)\right) = \langle 16, 40° \rangle$$

$$c_2 = 16 \cdot \left(\cos(130°) + i\sin(130°)\right) = \langle 16, 130° \rangle$$

$$c_3 = 16 \cdot \left(\cos(220°) + i\sin(220°)\right) = \langle 16, 220° \rangle$$

$$c_4 = 16 \cdot \left(\cos(310°) + i\sin(310°)\right) = \langle 16, 310° \rangle$$

(3)

$$z^5 = 3 - i4 \qquad |3 - i4| = 25 \qquad \arg(3 - i4) = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right) + 2\pi \mathrel{\hat{\approx}} 79°$$

$$|c_k| = 25 \qquad \arg(c_k) = \frac{79° + k \cdot 360°}{5} \qquad mit\, k = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$c_1 = 25 \cdot (\cos(16°) + i \sin(16°)) = \langle 25, 16° \rangle$$

$$c_2 = 25 \cdot (\cos(88°) + i \sin(88°)) = \langle 25, 88° \rangle$$

$$c_3 = 25 \cdot (\cos(160°) + i \sin(160°)) = \langle 25, 160° \rangle$$

$$c_4 = 25 \cdot (\cos(232°) + i \sin(232°)) = \langle 25, 232° \rangle$$

$$c_5 = 25 \cdot (\cos(304°) + i \sin(304°)) = \langle 25, 304° \rangle$$