

Tutorium Mathe 1 MT

III. Lineare Algebra:

Matrizen und ihre Eigenschaften:

1) Determinante

Ein erstes Beispiel zeigt, was die Determinante aussagt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0$$
$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} = 0$$

Ein Blick auf die Spaltenvektoren der Matrix zeigt, warum hier so schnell auf die Determinante geschlossen werden kann. Diese sind linear abhängig, d.h. dass alle Vektoren ein vielfaches des/der anderen Vektors/en sind. Ist jenes der Fall, ist das Ergebnis der Determinante Null. Sie sagt also etwas über die Spaltenvektoren der Matrix aus. Definiert ist sie nur für quadratische Matrizen.

Blicken wir als nächstes auf die Formeln zur Berechnung der Determinante.

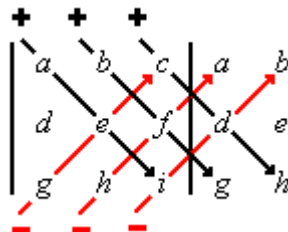
2x2 Matrizen:

Für eine 2x2 Matrix wird die Determinante nach einem Kreuzschema gerechnet. Es wird dazu die linke obere Zahl mit der rechten unteren multipliziert, davon wird das Produkt aus den anderen beiden Zahlen abgezogen.

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

3x3 Matrizen:

Für jene Matrizen gilt die Sarru'sche Regel. Diese greift das Kreuzschema auf, allerdings muss hier jeweils dreimal multipliziert werden. Eine Grafik, die aus Wikipedia entnommen wurde, verdeutlicht diese Rechnung besser als eine ausführliche Erklärung. Durch das hinzufügen der ersten beiden Spalten hinter die Matrix ist es einfacher, die Rechnung nachzuvollziehen.



$$\det \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = aei + cdh + bfg - ceg - afh - bdi$$

2) Ränge von Matrizen

Der Rang einer Matrix ist zur Bestimmung der Lösbarkeit von LGS sehr wichtig. Er sagt etwas über Dimensionen der Lösung aus, daher ist die Betrachtung des Rangs von Vorteil bei der Berechnung von LGS. Der Rang einer Matrix kann auf die Determinante zurückgeführt werden, indem man ihn zunächst für quadratischen Matrizen definiert. Für eine quadratische Matrix ($n \times n$) gilt:

Der Rang der Matrix ist gleich der Zeilen-/Spaltenanzahl, falls die Determinante der Matrix ungleich Null ist.

Ist die Determinante gleich Null, so ist der Rang der Matrix kleiner n . In diesem Fall muss die größte quadratische Untermatrix betrachtet werden. Bei einer 3×3 Matrix muss dann eine 2×2 Matrix betrachtet werden, usw.

Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \operatorname{Rg}(A) < 3$$
$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \operatorname{Rg}(A) < 2$$

Die einzige Matrix mit Rang 0 ist die Nullmatrix. Daher hat die Matrix im Beispiel den Rang 1. Für nicht quadratische Matrizen behilft man sich mit quadratischen Untermatrizen. Der Rang einer nicht quadratischen Matrix ist gleich dem Rang der größten quadratischen Untermatrix. Dabei gibt es immer mehrere Möglichkeiten, welche Untermatrix man zur Berechnung nutzt. Mit dieser verfährt man dann wie bei den quadratischen Matrizen.

3) Lösungsräume von LGS

Ein LGS muss nicht lösbar sein, ist es allerdings lösbar, so gibt es in der Regel drei Möglichkeiten, welche Lösungen es gibt. Diese werden auch als Dimensionen bezeichnet. Ein null-dimensionaler Lösungsraum heißt es gibt eine Punktlösung. Ein ein-dimensionaler Lösungsraum bezeichnet eine Lösungsgerade, ist die Lösung zwei-dimensional, so besteht sie aus einer Lösungsebene. Die Dimensionen der Lösung lassen sich mit Hilfe des Rangs der LGS-Matrizen bestimmen. Dabei ist die Matrix A die linke Seite des LGS, $A | \vec{b}$ bezeichnet die gesamte LGS-Matrix. Bestimmt man nun die Ränge von A und $A | \vec{b}$, kann man mit ihrer Hilfe auf die Lösbarkeit des LGS schließen.

Ist $\operatorname{Rg}(A | \vec{b}) > \operatorname{Rg}(A)$, ist das LGS nicht lösbar.

Falls $\operatorname{Rg}(A | \vec{b}) = \operatorname{Rg}(A)$, besitzt das LGS einen $n - \operatorname{Rg}(A | \vec{b})$ -dimensionalen Lösungsraum.

Dadurch dass die Matrix $A | \vec{b}$ durch das Anfügen des Vektors \vec{b} an die Matrix A entsteht, gilt für LGS immer $\operatorname{Rg}(A | \vec{b}) \geq \operatorname{Rg}(A)$.

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & -4 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & p \end{array} \right)$$

a) Für welches p ist das System lösbar?

Diese Antwort kann man sich über die Ränge von Matrizen sehr schnell die Lösung erschließen. Dazu betrachten wir zunächst die Determinante der linken Seite des LGS.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = 20 - 16 + 0 - 0 + 20 - 24 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Rg}(A) < 3$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 5 - 6 = -1$$

$$\Rightarrow \text{Rg}(A) = 2$$

Erweitert man jetzt mit dem Ergebnisvektor, könnte man für den Rang des LGS auch den Rang der Matrix schreiben. Dies macht aber wenig Sinn, weil in diesem Fall das p gesucht ist, sodass das System lösbar ist. Es muss also gelten: $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A | \vec{b})$. Natürlich ist auch die Matrix A eine Untermatrix der Matrix $\text{Rg}(A | \vec{b})$, man könnte also die Aussage sofort bestätigen. Allerdings ist das p damit nicht bestimmt. Dazu nimmt man für die Berechnung des Rangs $\text{Rg}(A | \vec{b})$ eine Untermatrix, in der das p vorkommt und berechnet ihre Determinante.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \\ 5 & 4 & p \end{pmatrix} = -8p - 60 - 60 - 56 = -8p - 176 = -8(p + 22)$$

Die Determinante der Matrix muss Null sein, damit der Rang der Matrix kleiner drei ist. Um dies zu erreichen muss $p = -22$ sein.