

Aufgabenblatt: Lineare Algebra (+ Lösungen)

1) Berechnen Sie den Abstand zwischen den zwei angegebenen Vektoren.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{19}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 7$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 + 1^2} = \sqrt{53}$$

2) Berechnen Sie den Winkel zwischen den zwei angegebenen Vektoren.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\text{a) } \cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{22}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{41}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{22}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{41}}\right) \approx 23^\circ$$

$$\text{b) } \cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}} = \frac{31}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{77}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{31}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{77}}\right) \approx 19^\circ$$

$$\text{c) } \cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}} = \frac{76}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{246}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{76}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{246}}\right) \approx 40^\circ$$

- 3) Eine Ebene E geht durch den Punkt $P(6, 8, 2)$ und hat $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ als einen

Normalenvektor. Bestimmen Sie für E eine Ebenengleichung in Normalenform, eine Koordinatenform, eine Parameterform und eine Hesse'sche Normalenform.

Die Normalenform der Ebenengleichung ist definiert als

$$E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$$

Da ein Punkt gegeben ist, kann dessen Ortsvektor als \vec{p} eingesetzt werden. Man erhält:

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Für die Koordinatenform ergibt sich entsprechend:

$$x + 3y - 5z = d$$

$$6 + 3 \cdot 8 - 2 \cdot 5 = d = 20$$

$$x + 3y - 5z = 20$$

Die Parameterform kann aus der Koordinatengleichung hergeleitet werden. Dazu wird nach einer der Koordinaten gelöst und entsprechend eingesetzt.

$$x = -3y + 5z - 20$$

$$y = y$$

$$z = z$$

$$E: \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Hesse'sche Normalenform wird durch die Berechnung eines Normaleneinheitsvektors möglich, welche sich mit Hilfe des gegebenen Normalenvektors durchführen lässt.

$$|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{35}$$

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{35}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{n}_0 \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$$

$$E: \frac{1}{\sqrt{35}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

- 4) Gegeben sind die Punkte $A(1, -2, -7)$, $B(17, -2, 5)$, $C(-8, -2, 5)$ und $D(1, 6, 7)$. Berechnen Sie den Abstand des Punktes D von der Ebene F, welche die Punkte A, B und C enthält.

Man bildet zunächst aus den Punkten die Ebenengleichung in Parameterform.

$$F: \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Aus den Spannvektoren ergibt sich ein Normalenvektor, aus dem dann ein Normaleneinheitsvektor berechnet wird.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -225 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = 225$$

$$n_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Abstand des Punktes D von der Ebene F lässt sich nun über die Hesse'sche Normalenform berechnen.

$$F: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$d = \left| \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 8$$

- 5) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen E_1 und E_2 , welche durch die angegebenen Punkte A-F definiert sind.

$$E_1: A(1,0,1), B(2,2,4), C(5,-1,1)$$

$$E_2: D(11,-5,-3), E(13,-4,-1), F(1,-16,-21)$$

Zunächst werden beide Ebenen in Parameterform notiert.

$$E_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -11 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Jetzt wird anhand von linearer Abhängigkeit der Spannvektoren geprüft, ob die Ebenen parallel/identisch sind oder sich schneiden.

$$r + 4s = 2t$$

$$2r - s = t$$

$$3r = 2t$$

$$4s = 2r$$

$$2r - s = t$$

$$3r - 2t = 0$$

$$4s = 2r$$

$$3s = t$$

$$3r - 2t = 0$$

$$4s = 2r$$

$$3s = t$$

$$0 = 0$$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, daher sind die Ebenen parallel. Nun wird durch die lineare Abhängigkeit zwischen Spannvektoren und einem Verbindungsvektor zwischen zwei Punkten der Ebenen geprüft.

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$r + 4s = -10a$$

$$2r - s = 5a$$

$$3r = 4a$$

$$4a + 12s = -30a$$

$$8a - 3s = 15a$$

$$3r = 4a$$

$$12s = -34a$$

$$3s = -7a$$

$$3r = 4a$$

$$\frac{17}{6} = \frac{7}{3}$$

$$3r = 4a$$

Das Gleichungssystem besitzt keine Lösung, daher liegen die beiden Stützpunkte nicht in derselben Ebene. Die Ebenen E_1 und E_2 sind daher parallel zu einander.