Tutorium Mathe 2 MT

Aufgabenblatt: Differentialgleichungen 1. Ordnung (+ Lösungen)

1) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\left(x+1-2y-y^2\right)e^x-2\left(y+1\right)e^x y'=0; \qquad y\left(0\right)=1.$$

Es liegt eine exakte DGL vor, die entsprechend der Regeln berechnet werden kann.

$$P\left(x,y\right)=\left(x+1-2y-y^2\right)e^x$$
$$Q\left(x,y\right)=-2\left(y+1\right)e^x$$

$$P_y\left(x,y\right)=\left(-2y-2\right)e^x$$
$$Q_x\left(x,y\right)=\left(-2y-2\right)e^x$$

➔ Es existiert ein Potenzial, weil $P_y\left(x,y\right)=Q_x\left(x,y\right)$.

$$\begin{aligned}F\left(x,y\right)&=\int P\left(x,y\right)dx=\left(x+1-2y-y^2\right)e^x-\int e^x dx\\&=x\cdot e^x+e^x-2y\cdot e^x-y^2\cdot e^x-e^x+C\left(y\right)\\C\left(y\right)&=F\left(x,y\right)-x\cdot e^x+2y\cdot e^x+y^2\cdot e^x\\C'\left(y\right)&=F_y\left(x,y\right)+2y\cdot e^x+2\cdot e^x=-2y\cdot e^x-2\cdot e^x+2y\cdot e^x+2\cdot e^x=0\\&\Rightarrow C\left(y\right)=const.\Rightarrow C\left(y\right)=0\left(Annahme!!\right)\end{aligned}$$

$$x\cdot e^x-2y\cdot e^x-y^2\cdot e^x=c$$
$$y^2+2y-x+c\cdot e^{-x}=0$$
$$y_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+x-c\cdot e^{-x}}$$
$$y=-1+\sqrt{1+x-c\cdot e^{-x}}$$

Einsetzen des AWP:

$$1=-1+\sqrt{1-c}$$
$$2=\sqrt{1-c}$$
$$-3=c$$

Die Lösung des AWP lautet:

$$y=-1+\sqrt{1+x+3\cdot e^{-x}}$$

2) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' = e^{-y+2\ln(x)}$ mit der Anfangsbedingung $y(3) = 2$.

Es liegt nach kleinen Umformungen eine DGL vom Typ „Trennung der Veränderlichen“ vor.

$$
\begin{aligned}
y' &= e^{-y} \cdot e^{\ln(x^2)} = e^{-y} \cdot x^2 \\
e^y \cdot y' &= x^2 \\
\int e^y dy &= \int x^2 dx \\
e^y &= \frac{x^3}{3} + c \\
y &= \ln\left(\frac{x^3}{3} + c\right)
\end{aligned}
$$

Einsetzen des AWP:

$$
\begin{aligned}
e^2 &= \frac{27}{3} + c \\
e^2 - 9 &= c
\end{aligned}
$$

Die Lösung des AWP lautet:

$$y = \ln\left(\frac{x^3}{3} + e^2 - 9\right)$$

3) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{xy}\left(y^2 - x\sqrt{x^2 + y^2}\right); \quad y(1) = 1.$$

Zunächst muss man die DGL umformen, um den Typ der DGL erkennen und die entsprechenden Berechnungsschritte durchführen zu können.

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{y^2}{xy} - \frac{x\sqrt{x^2 + y^2}}{xy} \\
&= \frac{y}{x} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} \\
&= \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} \\
&= \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{x^2}{y^2} + 1} \rightarrow Typ: \ homogen\, in\, x\, und\ y
\end{aligned}
$$

$$\cancel{z} + x \cdot z' = \cancel{z} - \sqrt{\frac{1}{z^2} + 1}$$

$$\sqrt{\frac{z^2}{z^2+1}} \cdot z' = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} dz = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$SUB:$$

$$t = z^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{dt}{dz} = 2z \Leftrightarrow dz = \frac{dt}{2z}$$

$$\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\ln(|x|) + c$$

$$\sqrt{t} = -\ln(|x|) + c$$

$$z^2 + 1 = \sqrt{-\ln(|x|) + c}$$

$$y^2 = x^2 \sqrt{-\ln(|x|) + c} - 1 \Rightarrow AWP: 1 = \sqrt{c} - 1 \Leftrightarrow c = 4$$

Die Lösung des AWP lautet:

$$y = x\sqrt{\sqrt{-\ln(|x|) + 4} - 1}$$

4) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{x + 2y}{x}.$$

Auch diese DGL muss zunächst umgeformt werden, damit erkennbar wird, welchem Typ sie entspricht.

$$y' = 1 + \frac{2y}{x} \rightarrow homogen\,in\,x\,und\,y$$

$$z + x \cdot z' = 1 + 2z$$

$$\frac{1}{1+z} \cdot z' = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{1+z} dz = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln(|1+z|) = \ln(|x|) + c$$

$$1 + z = x \cdot e^c$$

$$z = x \cdot C - 1$$

$$y = x \cdot (x \cdot C - 1)$$