

## Tutorium Mathe 2 MT

### Aufgabenblatt: Differentialgleichungen 2.Ordnung (+ Lösungen)

- 1) Für die Differentialgleichung  $x'' - 2x' + 3x = \sin(4t)$  ermittle man eine partikuläre Lösung.

Der Störterm lässt sich durch einen speziellen Ansatz modellieren, daher wird dieser zur Lösung der DGL genutzt.

Bestimmung der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-2} = 1 \pm i2$$

Ansatz:

$$\beta = 4, \gamma = 0 \Rightarrow \gamma + i\beta = i4 \Rightarrow k = 0$$

$$x = A_0 \cdot \cos(4t) + B_0 \cdot \sin(4t)$$

$$x' = -4A_0 \cdot \sin(4t) + 4B_0 \cdot \cos(4t)$$

$$x'' = -16A_0 \cdot \cos(4t) - 16B_0 \cdot \sin(4t)$$

Einsetzen in die inhomogene DGL:

$$-16A_0 \cdot \cos(4t) - 16B_0 \cdot \sin(4t) - 2(-4A_0 \cdot \sin(4t) + 4B_0 \cdot \cos(4t)) + \dots$$

$$\dots 3(A_0 \cdot \cos(4t) + B_0 \cdot \sin(4t)) = \sin(4t)$$

$$-13A_0 \cdot \cos(4t) - 13B_0 \cdot \sin(4t) + 8A_0 \cdot \sin(4t) - 8B_0 \cdot \cos(4t) = \sin(4t)$$

$$(-13A_0 - 8B_0) \cos(4t) + (8A_0 - 13B_0) \cdot \sin(4t) = \sin(4t)$$

Der verbleibende Term kann nun über ein LGS gelöst werden.

$$-13A_0 - 8B_0 = 0$$

$$8A_0 - 13B_0 = 1$$

$$A_0 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -8 \\ 1 & -13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -13 & -8 \\ 8 & -13 \end{vmatrix}} = \frac{8}{233} \quad B_0 = \frac{\begin{vmatrix} -13 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}}{233} = -\frac{13}{233}$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL lautet:

$$x(t) = \frac{8}{233} \cos(4t) - \frac{13}{233} \sin(4t)$$

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

Bestimmung der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 + \sqrt{0} = 1$$

$$y_h(x) = C_1 \cdot x \cdot e^x + C_2 \cdot e^x$$

Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten:

$$y_1(x) = xe^x$$

$$y_1'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$$y_2(x) = e^x$$

$$y_2'(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \frac{e^x \cdot \frac{e^x}{1+x^2}}{e^x(1+x) \cdot e^x - e^x \cdot xe^x} dx = -\int \frac{\cancel{e^{2x}} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{\cancel{e^{2x}}(1+x) - \cancel{e^{2x}} \cdot x} dx = -\int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\arctan(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2(x) &= \int \frac{xe^x \cdot \frac{e^x}{1+x^2}}{e^x(1+x) \cdot e^x - e^x \cdot xe^x} dx = \int \frac{x \cancel{e^{2x}} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{\cancel{e^{2x}}(1+x) - \cancel{e^{2x}} \cdot x} dx = \int \frac{x \cdot \frac{1}{1+x^2}}{1} dx \\ &= \int \frac{x}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

SUB:

$$y = 1 + x^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{x}{y} \frac{dy}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy = \frac{\ln(y)}{2} = \frac{\ln(1+x^2)}{2}$$

$$y_p(x) = -\arctan(x) \cdot xe^x + \frac{\ln(1+x^2)}{2} \cdot e^x$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet:

$$y(x) = C_1 \cdot x \cdot e^x + C_2 \cdot e^x - \arctan(x) \cdot x e^x + \frac{\ln(1+x^2)}{2} \cdot e^x$$

$$= e^x \left( C_1 x + C_2 - \arctan(x) \cdot x + \frac{\ln(1+x^2)}{2} \right)$$

- 3) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $y'' - 2y' - 3y = \sqrt{e^x}$ .  
Bestimmen Sie ferner die Lösung, die  $y(0) = y'(0) = 0$  erfüllt.

Der Störterm kann auch als  $e^{\frac{1}{2}x}$  geschrieben werden, damit kann der spezielle Ansatz zur Lösung der inhomogenen DGL genutzt werden.

Bestimmung der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$$

$$y_h(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x}$$

Ansatz:

$$\beta = 0, \gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma + i\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow k = 0$$

$$y_p(x) = A_0 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y_p'(x) = \frac{A_0}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y_p''(x) = \frac{A_0}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

Einsetzen in die inhomogene DGL:

$$\frac{A_0}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2 \left( \frac{A_0}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) - 3 \left( A_0 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) = e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\frac{A_0}{4} \cancel{e^{\frac{1}{2}x}} - A_0 \cancel{e^{\frac{1}{2}x}} - 3A_0 \cancel{e^{\frac{1}{2}x}} = \cancel{e^{\frac{1}{2}x}}$$

$$\frac{A_0}{4} - \frac{16A_0}{4} = 1$$

$$-\frac{15}{4} A_0 = 1$$

$$A_0 = -\frac{4}{15}$$

$$y_p(x) = -\frac{4}{15} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

Lösen des AWP:

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x} - \frac{4}{15} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y'(x) = -C_1 \cdot e^{-x} + 3C_2 \cdot e^{3x} - \frac{2}{15} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= \frac{4}{15} \\ -C_1 + 3C_2 &= \frac{2}{15} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 15C_1 + 15C_2 &= 4 \\ -15C_1 + 45C_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 15 \\ 2 & 45 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & 15 \\ -15 & 45 \end{vmatrix}} = \frac{180 - 30}{675 + 225} = \frac{150}{900} = \frac{1}{6}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 4 \\ -15 & 2 \end{vmatrix}}{900} = \frac{30 + 60}{900} = \frac{90}{900} = \frac{1}{10}$$

Die Lösung des AWP lautet:

$$y(x) = \frac{1}{6} \cdot e^{-x} + \frac{1}{10} \cdot e^{3x} - \frac{4}{15} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

4) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $y'' + 4y = \sin(2x)$

Der Störterm lässt sich auch in dieser DGL per speziellem Ansatz modellieren, sodass dieser zur Bestimmung der Lösung genutzt wird.

Bestimmung der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm i2$$

Ansatz:

$$\beta = 2, \gamma = 0 \Rightarrow \gamma + i\beta = i2 \Rightarrow k = 1$$

$$y_p(x) = A_0 x \cdot \cos(2x) + B_0 x \cdot \sin(2x)$$

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A_0 \cdot \cos(2x) - 2A_0 x \cdot \sin(2x) + B_0 \cdot \sin(2x) + 2B_0 x \cdot \cos(2x) \\ &= (B_0 - 2A_0 x) \cdot \sin(2x) + (A_0 + 2B_0 x) \cdot \cos(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= -2A_0 \cdot \sin(2x) + (2B_0 - 4A_0 x) \cdot \cos(2x) \\ &\quad + 2B_0 \cdot \cos(2x) - (2A_0 + 4B_0 x) \cdot \sin(2x) \\ &= (-4A_0 - 4B_0 x) \cdot \sin(2x) + (4B_0 - 4A_0 x) \cdot \cos(2x) \end{aligned}$$

Einsetzen in die inhomogene DGL:

$$\begin{aligned} &(-4A_0 - 4B_0 x) \cdot \sin(2x) + (4B_0 - 4A_0 x) \cdot \cos(2x) \dots \\ &\dots + 4(A_0 x \cdot \cos(2x) + B_0 x \cdot \sin(2x)) = \sin(2x) \end{aligned}$$

$$-4A_0 \cdot \sin(2x) + 4B_0 \cdot \cos(2x) = \sin(2x)$$

Der verbleibende Term kann nun über ein LGS gelöst werden.

$$4B_0 = 0 \rightarrow B_0 = 0$$

$$-4A_0 = 1 \rightarrow A_0 = -\frac{1}{4}$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{4} x \cdot \cos(2x)$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet:

$$y(x) = \left( C_1 - \frac{1}{4} x \right) \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x)$$