

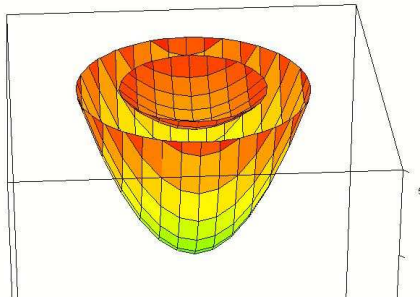
Aufgabenblatt: Integralrechnung / Gebietsintegrale Teil 2 (+ Lösungen)

- 1) Sei $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 2y^2 \leq z \leq 4 + x^2 + y^2\}$. Berechnen Sie das Gebietsintegral

$$\iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz$$

durch Transformation auf Zylinderkoordinaten.

Skizze:



Gezeigt sind die Begrenzungen für z , aus denen die Grenzen für die Berechnung hergeleitet werden.

Wegen der komplett abgedeckten Winkelfläche ergibt sich direkt $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Die Koordinaten für r entsprechen den Vektorlängen, die in jene durch den Winkel vorgegebene Richtungen auftreten können. Diese ergeben sich aus den Grenzen für z .

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 &\leq 4 + x^2 + y^2 \\ 2(x^2 + y^2) &\leq 4 + (x^2 + y^2) \\ 2r^2 &\leq 4 + r^2 \\ r^2 &\leq 4 \\ r &\leq 2 \end{aligned}$$

Da im Ursprung der Funktion $2x^2 + 2y^2$ natürlich $r = 0$ gilt, hat man für r nun die entsprechenden Grenzen $0 \leq r \leq 2$.

Mit diesen kann nun das Integral berechnet werden.

$$\begin{aligned} \iiint_D (r^2 \cdot r) dr dz d\varphi &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{2r^2}^{4+r^2} r^3 dz \right) d\varphi \right) dr \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} r^3 \varphi \Big|_{2r^2}^{4+r^2} d\varphi \right) dr = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} 4r^3 - r^5 d\varphi \right) dr \end{aligned}$$

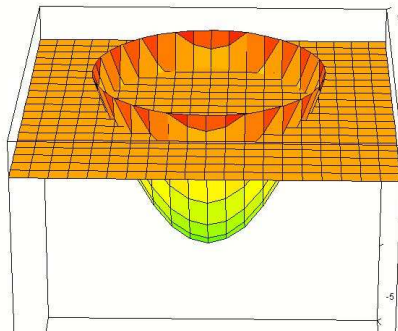
$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 (4r^3 - r^5) \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} dr = 2\pi \int_0^2 (4r^3 - r^5) dr \\
&= 2\pi \cdot \left(r^4 - \frac{r^6}{6} \Big|_0^2 \right) = 2\pi \cdot \left(\frac{96}{6} - \frac{64}{6} \right) \\
&= \frac{32\pi}{3}
\end{aligned}$$

2) Berechnen Sie das Volumen desjenigen Gebiets, das vom Rotationsparaboloid

$$z = 2x^2 + 2y^2$$

und der Fläche $z = 3$ eingeschlossen wird (Skizze!).

Skizze:



Weil es sich um einen Rotationskörper handelt, sollte mit Zylinderkoordinaten gearbeitet werden. Deren Grenzen lassen sich aus den in der Aufgabenstellung angegebenen Werten herleiten.

Für den Winkel φ gilt, weil ein voller Kreis erschlossen werden muss $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Der Koordinate für z ist festgelegt durch die Höhen, die eingenommen werden können.

Diese sind begrenzt durch $2x^2 + 2y^2 \leq z \leq 3$, also $2r^2 \leq z \leq 3$. Der Vektor r kann

Längen von $0 \leq r \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$ einnehmen. r gibt den Abstand von der z -Achse an. Dieser ist im

Ursprung natürlich 0, bei $z = 3$ muss man diesen aus der Funktionsgleichung für z bestimmen. Dabei muss man die Symmetrie beachten, denn diese macht es möglich, dass man die Funktion in einer Ebene betrachtet und damit eine Koordinate rauswerfen kann.

$$3 = 2x^2 + 2y^2 = 2 \cdot r^2$$

$$\frac{3}{2} = r^2$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = r$$

Nun kann mit den Werten das Integral berechnet werden. Für ein Volumen gilt:

$$V = \iiint_D r \, dz \, dr \, d\varphi$$

Entsprechend kann man nun einsetzen:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \left(\int_{2r^2}^3 r \, dz \right) dr \right) d\varphi &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} r \cdot z \Big|_{2r^2}^3 dr \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} 3r - 2r^3 dr \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{3r^2}{2} \right|_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} - \left. \frac{r^4}{2} \right|_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} d\varphi \\ &= \frac{9}{8} \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 d\varphi \right) = \frac{9\pi}{4} \end{aligned}$$

- 3) Bestimmen Sie die Masse der Hohlkugel, die durch die Gleichungen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ definiert wird, wenn die Dichte in jedem Punkt der Hohlkugel umgekehrt proportional zum Abstand des Punktes vom Koordinatenursprung ist (Proportionalitätskonstante $k = \frac{1}{\pi}$).

Da es sich um zwei Kugeln handelt, die die Hohlkugel bilden, bietet sich das Rechnen mit Kugelkoordinaten an.

Die Dichte sollte als erstes bestimmt werden. Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass

$\rho = \frac{1}{r \cdot \pi}$ gilt, die Dichte also immer kleiner wird, je weiter man sich vom

Koordinatenursprung befindet. Daher bietet es sich an, den Vektor r direkt einzusetzen, um so nicht extra auf die Kugelkoordinaten transformieren zu müssen.

Die Kugelkoordinaten ergeben sich aus den Gleichungen der zwei Kugeln. Da es sich in beiden Fällen um komplette Kugeln handelt, kann dies direkt in die beiden Winkelbereiche geschrieben werden:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi$$

Der Verbindungsvektor vom Ursprung zur Kugeloberfläche kann sich in seiner Länge zwischen den beiden Kugelflächen verändern. Man kann jenes wieder auf Grund der Symmetrie in der Ebene betrachten und den Radius eines Kreises berechnen:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= 1 \\ r &= 1 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2$$

$$r = 2$$

Es ergibt sich also: $1 \leq r \leq 2$

Somit ist der Definitionsbereich festgelegt mit

$$G := \{(R, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi\}$$

Nun kann das entsprechende Integral aufgestellt und berechnet werden.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \frac{1}{r} \cdot R^2 \cdot \sin(\vartheta) d\vartheta \right) d\varphi \right) dr &= \frac{1}{\pi} \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} -R \cdot \cos(\vartheta) \Big|_0^\pi d\varphi \right) dr \\ &= \frac{1}{\pi} \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} (R) - (-R) d\varphi \right) dr \\ &= \frac{1}{\pi} \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} 2R d\varphi \right) dr \\ &= \frac{2}{\pi} \int_1^2 R \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} dr = \frac{2}{\pi} \int_1^2 2\pi R dr \\ &= 4 \cdot \frac{R^2}{2} \Big|_1^2 = 8 - 2 = 6 \end{aligned}$$

Die Hohlkugel hat eine Masse von 6.

- 4) Berechnen Sie für $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq x^2 y\}$ das Gebietsintegral

$$\iiint_D 2xyz \, dx dy dz .$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{x^2 y} 2xyz \, dz \right) dy \right) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^2 x \cdot y \cdot z^2 \Big|_0^{x^2 y} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^2 x^5 \cdot y^3 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x^5 \cdot \frac{y^4}{4} \Big|_0^2 dx = 4 \int_0^1 x^5 dx \\ &= 4 \cdot \frac{x^6}{6} \Big|_0^1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$