

Tutorium Mathe 2 MT

Aufgabenblatt 1: Lösungen

- 1) Berechnen Sie den Summenwert der folgenden geometrischen Reihen

Da $|q| < 1$ erfüllt ist, kann man den Wert der Summe mit Hilfe der Formel $s = \frac{1}{1-q}$

berechnen. Daraus ergibt sich:

$$\text{a) } s = \frac{1}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{6}$$

$$\text{b) } s = \frac{1}{1 - \frac{7}{10}} = \frac{1}{\frac{3}{10}} = \frac{10}{3}$$

- 2) Schreiben Sie die folgenden Reihen als Summe und untersuchen Sie sie auf Konvergenz mit Hilfe des Quotientenkriteriums

a)

$$1 + \frac{10}{1!} + \frac{100}{2!} + \frac{1000}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$$

Konvergenz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n+1} = 0 < 1 \quad \left(\text{mit } a_n = \frac{10^n}{n!} \text{ und } a_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \right)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{10^n} = \frac{10^n \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot n+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{10^n} = \frac{10}{n+1}$$

b)

$$\frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}$$

Konvergenz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2(n+1) \cdot 2^{2(n+1)-1}}}{\frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+2) \cdot 2^{2n} \cdot 2} \cdot \frac{(2n-1) \cdot 2^{2n} \cdot \frac{1}{2}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{4 \cdot (2n+2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{2n-1}{2n+2} = \frac{1}{4} < 1$$

c)

$$1 + 0,25 + 0,0625 + 0,015625 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Konvergenz :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1}{4} < 1$$

3) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

a)

$$P(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$$

Konvergenzradius :

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 \Rightarrow |x| < 1$$

b)

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1}$$

Konvergenzradius :

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+1+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+2)}{(n+1) \cdot (n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{n^2 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n^2 + 2n + 1} = 1 \\ &\Rightarrow |x| < 1 \end{aligned}$$

c)

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \cdot x^n$$

Konvergenzradius :

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{n!}}{\frac{n+2}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot (n+1)}{n+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^2 \cdot \frac{1}{n+2} = \infty \rightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- 4) Hier bestimmt man zunächst die Mac-Laurinsche Reihe der Funktionen e^x und e^{-x} und dann mit Hilfe der Funktionsgleichung die Reihe von $\cosh(x)$.

Mac-Laurinsche Reihe für e^x :

$$f(x) = e^x \rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \rightarrow f''(0) = 1$$

⋮

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Mac-Laurinsche Reihe für e^{-x} :

$$f(x) = e^{-x} \rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = -e^{-x} \rightarrow f'(0) = -1$$

$$f''(x) = e^{-x} \rightarrow f''(0) = 1$$

⋮

$$f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Mac-Laurinsche Reihe für $\cosh(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^4}{4!} + \dots \right) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

- 5) Hier bestimmt man zunächst die Mac-Laurinsche Reihe von $\sin(x)$.

$$f(x) = \sin(x) \rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos(x) \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin(x) \rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos(x) \rightarrow f'''(0) = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1^n}{(2n+1)!} x^{(2n+1)}$$

Als nächstes multipliziert man die Potenzreihen gliedweise. Dabei sind hier nur die Elemente der Klammern berücksichtigt, die Reihe geht natürlich noch weiter.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots \right) \cdot \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots \right) \\ &= x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{120}x^6 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{36}x^6 - \frac{1}{720}x^8 + \frac{1}{120}x^6 - \frac{1}{720}x^8 + \frac{1}{14400}x^{10} + \dots \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 - \frac{x^8}{360} + \frac{1}{14400}x^{10} + \dots \end{aligned}$$

6) Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Taylorreihe mit der angegebenen Entwicklungsmitte.

a)

$$f(x) = \cos(x) \rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -\sin(x) \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(x) = -\cos(x) \rightarrow f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = \sin(x) \rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \dots$$

b)

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \rightarrow f''(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}} \rightarrow f'''(1) = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + \dots$$

c)

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow f(3) = \frac{1}{9}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \rightarrow f'(3) = -\frac{2}{27}$$

$$f''(x) = \frac{6}{x^4} \rightarrow f''(3) = \frac{2}{27}$$

$$f'''(x) = -\frac{24}{x^5} \rightarrow f'''(3) = -\frac{8}{81}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{9} - \frac{2}{27}(x-3) + \frac{1}{27}(x-3)^2 - \frac{4}{243}(x-3)^3 + \dots$$

7) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Regel von de L'Hospital.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2(x)} \rightarrow 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \rightarrow 1$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} \rightarrow 0$$

8) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - e^x)$ durch Ausklammern der Exponentialfunktion und Verwendung der Grenzwertregel von de L'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - e^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{e^x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} - \lim_{x \rightarrow \infty} 1 \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \rightarrow \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} \rightarrow 0, \lim_{x \rightarrow \infty} 1 \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} - \lim_{x \rightarrow \infty} 1 \right) = \infty \cdot (0 - 1) = -\infty$$