Tutorium Mathe 2 MT

Aufgabenblatt 1: Lösungen

1) Berechnen Sie den Summenwert der folgenden geometrischen Reihen

Da $|q|<1$ erfüllt ist, kann man den Wert der Summe mit Hilfe der Formel $s=\frac{1}{1-q}$ berechnen. Daraus ergibt sich:

a) $s=\frac{1}{1+\frac{1}{5}}=\frac{1}{\frac{6}{5}}=\frac{5}{6}$

b) $s=\frac{1}{1-\frac{7}{10}}=\frac{1}{\frac{3}{10}}=\frac{10}{3}$

2) Schreiben Sie die folgenden Reihen als Summe und untersuchen Sie sie auf Konvergenz mit Hilfe des Quotientenkriteriums

a)

$$1+\frac{10}{1!}+\frac{100}{2!}+\frac{1000}{3!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$$

$$Konvergenz:$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n+1}=0<1 \qquad \left(mit\ a_n=\frac{10^n}{n!}\ und\ \ a_{n+1}=\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{10^n}=\frac{10^n\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot n\cdot n+1}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot n}{10^n}=\frac{10}{n+1}$$

b)

$$\frac{1}{1\cdot 2^1}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$$

$$Konvergenz:$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2(n+1)\cdot 2^{2(n+1)-1}}}{\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)\cdot 2^{2n}\cdot 2}\cdot\frac{(2n-1)\cdot 2^{2n}\cdot\frac{1}{2}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{4\cdot(2n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{2n-1}{2n+2}=\frac{1}{4}<1$$

c)

$$1+0,25+0,0625+0,015625+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

$$Konvergenz:$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}=\frac{1}{4}<1$$

3) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

a)

$$P(x)=x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n$$

$$Konvergenzradius:$$

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n+1}1\Rightarrow|x|<1$$

b)

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n+1}$$

$$Konvergenzradius:$$

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+1+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n+2)}{(n+1)\cdot(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n^2+2n+1}=1$$

$$\Rightarrow|x|<1$$

c)

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}\cdot x^n$$

$$Konvergenzradius:$$

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n!}}{\frac{n+2}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot(n+1)}{n+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n+2}=\lim_{n\to\infty}(n+1)^2\cdot\frac{1}{n+2}=\infty\to x\in\mathbb{R}$$

4) Hier bestimmt man zunächst die Mac-Laurinsche Reihe der Funktionen e^x und e^{-x} und dann mit Hilfe der Funktionsgleichung die Reihe von $\cosh(x)$.

Mac-Laurinsche Reihe für e^x:

$$f(x) = e^x \to f(0) = 1$$
$$f'(x) = e^x \to f'(0) = 1$$
$$f''(x) = e^x \to f''(0) = 1$$
$$\vdots$$
$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Mac-Laurinsche Reihe für e^{-x}:

$$f(x) = e^{-x} \to f(0) = 1$$
$$f'(x) = -e^{-x} \to f'(0) = -1$$
$$f''(x) = e^{-x} \to f''(0) = 1$$
$$\vdots$$
$$f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Mac-Laurinsche Reihe für $\cosh(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^4}{4!} + \ldots \right) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

5) Hier bestimmt man zunächst die Mac-Laurinsche Reihe von $\sin(x)$.

$$f(x) = \sin(x) \to f(0) = 0$$
$$f'(x) = \cos(x) \to f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\sin(x) \to f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = -\cos(x) \to f'''(0) = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1^n}{(2n+1)!} x^{(2n+1)}$$

Als nächstes multipliziert man die Potenzreihen gliedweise. Dabei sind hier nur die Elemente der Klammern berücksichtigt, die Reihe geht natürlich noch weiter.

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \ldots \right) \cdot \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \ldots \right)$$

$$= x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{120}x^6 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{36}x^6 - \frac{1}{720}x^8 + \frac{1}{120}x^6 - \frac{1}{720}x^8 + \frac{1}{14400}x^{10} + \ldots$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 - \frac{x^8}{360} + \frac{1}{14400}x^{10} + \ldots$$

6) Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Taylorreihe mit der angegebenen Entwicklungsmitte.

a)

$$f(x) = \cos(x) \rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -\sin(x) \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(x) = -\cos(x) \rightarrow f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = \sin(x) \rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \ldots$$

b)

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{x^3}} \rightarrow f''(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8 \cdot \sqrt{x^5}} \rightarrow f'''(1) = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + \ldots$$

c)

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\to f(3)=\frac{1}{9}$$
$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}\to f'(3)=-\frac{2}{27}$$
$$f''(x)=\frac{6}{x^4}\to f''(3)=\frac{2}{27}$$
$$f'''(x)=-\frac{24}{x^5}\to f'''(3)=-\frac{8}{81}$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{9}-\frac{2}{27}(x-3)+\frac{1}{27}(x-3)^2-\frac{4}{243}(x-3)^3+\dots$$

7) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Regel von de L'Hospital.

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\to\frac{0}{0}$$
$$\Rightarrow(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2(x)}$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2(x)}\to 1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\to 1$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}\to\frac{\infty}{\infty}$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}\to 0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}\to 0$$

8) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to\infty}\left(x-e^x\right)$ durch Ausklammern der Exponentialfunktion und Verwendung der Grenzwertregel von de L'Hospital.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-e^x\right)=\lim_{x\to\infty}e^x\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^x}-1\right)=\lim_{x\to\infty}e^x\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}-\lim_{x\to\infty}1\right)$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}e^x\to\infty,\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}\to 0,\lim_{x\to\infty}1\to 1$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}e^x\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}-\lim_{x\to\infty}1\right)=\infty\cdot(0-1)=-\infty$$