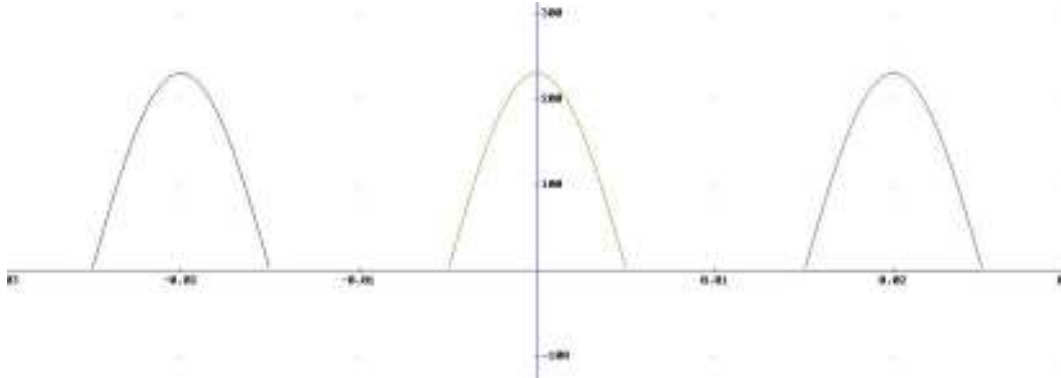


Tutorium Mathe 2 MT

Aufgabenblatt: Fourier Reihen von Funktionen mit der Periode $T > 0$ (+ Lösungen)

1)

a) Der Graph der Funktion hat folgenden Verlauf:



Der Graph zeigt, dass die Funktion $U(t)$ gerade ist, also keine Sinus-Anteile besitzt. Somit entfällt die Berechnung des Fourier Koeffizienten b_k . Außerdem kann man hier bei der Integralberechnung einfach das halbe Intervall berechnen und jenes Integral verdoppeln. Außerdem kann man die Periodenlänge des Integrals auf $T = \frac{1}{100}$ s ändern, weil der Rest sowieso Null würde. Dies gilt nur für die Integralgrenzen!!

b) Der Gleichspannungsanteil entspricht dem Anteil mit der Frequenz $\omega = 0$. Diese Berechnung entspricht der Berechnung von a_0 .

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(t) dt = 230V \cdot \frac{4}{1} \int_0^{\frac{1}{200}} \cos(100\pi \cdot t) dt = 230V \cdot 200 \cdot \frac{\sin(100\pi \cdot t)}{100\pi} \Big|_0^{\frac{1}{200}} \\ &= 46000V \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{100\pi} = \frac{46000V}{100\pi} = \frac{460V}{\pi} = 146,4V \end{aligned}$$

Der Gleichspannungsanteil von $U(t)$ beträgt 146,4V.

c) Die Grundschiwingung ist jene, für die gilt $k = 1$. Daher wird sie über a_1 berechnet.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt = 230V \cdot \frac{4}{1} \int_0^{\frac{1}{200}} \cos(100\pi \cdot t) \cdot \cos(100\pi \cdot t) dt \\
 &= 46000V \cdot \int_0^{\frac{1}{200}} \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(200\pi \cdot t)) dt \\
 &= 23000V \cdot \int_0^{\frac{1}{200}} 1 dt + \int_0^{\frac{1}{200}} \cos(200\pi \cdot t) dt \\
 &= 23000V \cdot t \Big|_0^{\frac{1}{200}} + \frac{\sin(200\pi \cdot t)}{200\pi} \Big|_0^{\frac{1}{200}} \\
 &= \frac{23000V}{200} = 115V
 \end{aligned}$$

Die Amplitude der Grundschiwingung ist 115V, die Frequenz ist $\omega = 100\pi Hz$. Die Frequenz muss man nicht berechnen, sie ergibt sich aus der Formel zur Berechnung von a_1 .

- d) Hier ist nach den weiteren Wechselanteilen und deren Frequenzen gefragt. Jene erhält man über die Berechnung von a_k , die die Fourier Reihe vervollständigt.

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt = 46000V \cdot \int_0^{\frac{1}{200}} \cos(100\pi \cdot t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{50} \cdot t\right) dt \\
 &= 46000V \cdot \int_0^{\frac{1}{200}} \cos(100\pi \cdot t) \cdot \cos(k \cdot 100\pi \cdot t) dt \\
 &= 46000V \cdot \int_0^{\frac{1}{200}} \frac{1}{2} \cdot (\cos(100\pi \cdot t - k \cdot 100\pi \cdot t) + \cos(100\pi \cdot t + k \cdot 100\pi \cdot t)) dt \\
 &= 23000V \cdot \left(\int_0^{\frac{1}{200}} \cos(100\pi \cdot t \cdot (1-k)) dt + \int_0^{\frac{1}{200}} \cos(100\pi \cdot t \cdot (1+k)) dt \right) \\
 &= 23000V \cdot \left(\frac{\sin(100\pi \cdot t \cdot (1-k))}{100\pi \cdot (1-k)} \Big|_0^{\frac{1}{200}} + \frac{\sin(100\pi \cdot t \cdot (1+k))}{100\pi \cdot (1+k)} \Big|_0^{\frac{1}{200}} \right) \\
 &= 23000V \cdot \left(\frac{\sin\left(100\pi \cdot \frac{1}{200} \cdot (1-k)\right)}{100\pi \cdot (1-k)} + \frac{\sin\left(100\pi \cdot \frac{1}{200} \cdot (1+k)\right)}{100\pi \cdot (1+k)} \right) \\
 &= 23000V \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (1-k)\right)}{100\pi \cdot (1-k)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (1+k)\right)}{100\pi \cdot (1+k)} \right) \\
 a_k &= \frac{230V}{\pi} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (1-k)\right)}{(1-k)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (1+k)\right)}{(1+k)} \right)
 \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe von $U(t)$ lautet:

$$\frac{230V}{\pi} + 115V \cdot \cos(100\pi \cdot t) + \frac{230V}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (1-k)\right)}{(1-k)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (1+k)\right)}{(1+k)} \right) \cdot \cos(k \cdot 100\pi \cdot t)$$

Betrachtet man die Sinusfunktionen, wird deutlich, dass nur gerade Koeffizienten eingesetzt werden können, damit ein Wechselanteil berechnet wird. Für alle anderen erhält man zuvor berechneten Gleichanteil. Daher wird dieser Prozess in der Elektrotechnik auch Einweggleichrichtung genannt.

Die Grundschwingung kann man über die Reihe nicht berechnen, daher muss man den Weg über a_1 gehen, um herauszufinden, welche Daten die Grundschwingung hat. Die Oberschwingungen ergeben sich durch Einsetzen von den entsprechenden Werten für k . In diesem Fall müssen Gleichanteil und Grundschwingung unberührt bleiben.

$$k = 2$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \frac{230V}{\pi} \cdot \left(\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{-1} + \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3} \right) \cdot \cos(200\pi \cdot t) \\ &= \frac{230V}{\pi} \cdot \left(\frac{-1}{-1} - \frac{1}{3} \right) \cdot \cos(200\pi \cdot t) \\ &= \frac{230V}{\pi} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cos(200\pi \cdot t) \\ &= \frac{460V}{3\pi} \cdot \cos(200\pi \cdot t) \approx 48,81V \cdot \cos(200\pi \cdot t) \end{aligned}$$

Die erste Oberschwingung hat eine Amplitude von 48,81V und eine Frequenz von $200\pi \text{ Hz}$.

$$k = 4$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \frac{230V}{\pi} \cdot \left(\frac{\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}{-3} + \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{5} \right) \cdot \cos(400\pi \cdot t) \\ &= \frac{230V}{\pi} \cdot \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \cdot \cos(400\pi \cdot t) \\ &= \frac{230V}{\pi} \cdot \left(-\frac{5}{15} + \frac{3}{15} \right) \cdot \cos(400\pi \cdot t) \\ &= \frac{460V}{15\pi} \cdot \cos(400\pi \cdot t) \approx 9,76V \cdot \cos(400\pi \cdot t) \end{aligned}$$

Die zweite Oberschwingung hat eine Amplitude von 9,76V und eine Frequenz von $400\pi \text{ Hz}$.

$$k = 6$$

$$\rightarrow \frac{230V}{\pi} \cdot \left(\frac{\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)}{-5} + \frac{\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)}{7} \right) \cdot \cos(600\pi \cdot t)$$

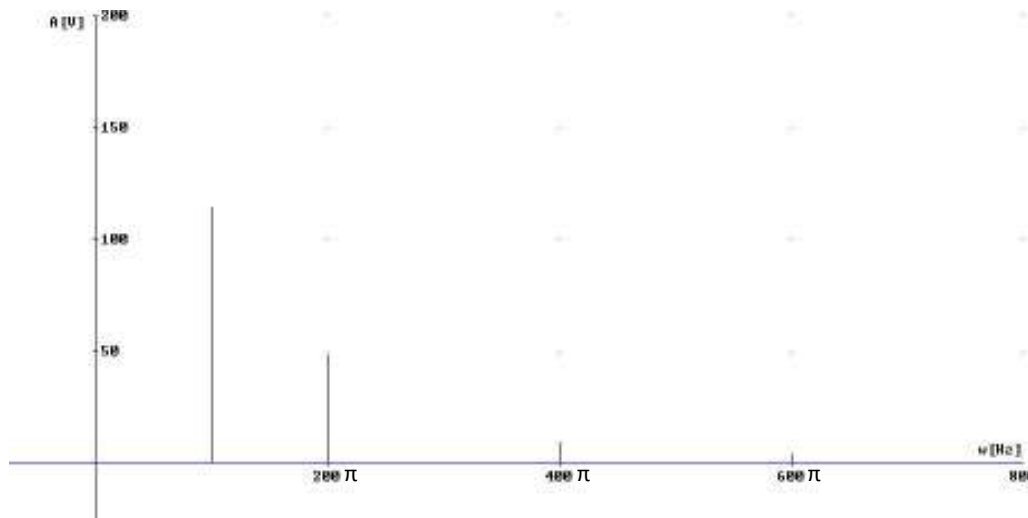
$$= \frac{230V}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \cdot \cos(600\pi \cdot t)$$

$$= \frac{230V}{\pi} \cdot \left(\frac{7}{35} - \frac{5}{35} \right) \cdot \cos(600\pi \cdot t)$$

$$= \frac{460V}{35\pi} \cdot \cos(600\pi \cdot t) \approx 4,18V \cdot \cos(600\pi \cdot t)$$

Die dritte Oberschwingung hat eine Amplitude von 4,18V und eine Frequenz von $600\pi \text{ Hz}$.

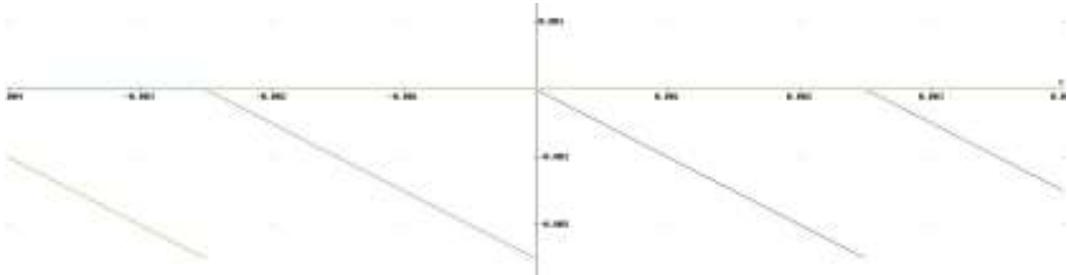
e) Mit den ermittelten Werten kann man nun das folgende Amplitudenspektrum zeichnen:



Anmerkung: Der Gleichanteil liegt auf der 0Hz-Achse, daher ist seine Amplitudenlinie nicht zu sehen.

2)

Zunächst ist auch hier eine Zeichnung des Funktionsgraphen hilfreich, um eventuelle Vereinfachungen zu erkennen.



Berechnung der Fourier-Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = 800 \cdot \int_0^{\frac{1}{400}} -x dx = -800 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{400} = -\frac{8}{3200} = -\frac{1}{400}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot x\right) dx = -800 \cdot \int_0^{\frac{1}{400}} x \cdot \cos(k \cdot 800\pi \cdot x) dx \\ &= -800 \cdot \left(x \cdot \frac{\sin(k \cdot 800\pi \cdot x)}{k \cdot 800\pi} \Big|_0^{\frac{1}{400}} - \frac{1}{k \cdot 800\pi} \int_0^{\frac{1}{400}} \sin(k \cdot 800\pi \cdot x) dx \right) \\ &= -800 \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 800\pi} \cdot \frac{\cos(k \cdot 800\pi \cdot x)}{k \cdot 800\pi} \Big|_0^{\frac{1}{400}} \right) \\ &= -800 \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 800\pi} \cdot \left(\frac{\cos\left(k \cdot 800\pi \cdot \frac{1}{400}\right)}{k \cdot 800\pi} + \frac{1}{k \cdot 800\pi} \right) \right) \\ &= -800 \cdot \left(-\frac{1}{k^2 \cdot 640000\pi^2} \cdot (-1+1) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot x\right) dx = -800 \cdot \int_0^{\frac{1}{400}} x \cdot \sin(k \cdot 800\pi \cdot x) dx \\
&= -800 \cdot \left(x \cdot \frac{\cos(k \cdot 800\pi \cdot x)}{k \cdot 800\pi} \Big|_0^{\frac{1}{400}} + \frac{1}{k \cdot 800\pi} \cdot \int_0^{\frac{1}{400}} \cos(k \cdot 800\pi \cdot x) dx \right) \\
&= -800 \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 640000\pi} + \left(\frac{1}{k \cdot 800\pi} \cdot \frac{\sin(k \cdot 800\pi \cdot x)}{k \cdot 800\pi} \Big|_0^{\frac{1}{400}} \right) \right) \\
&= -800 \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 640000\pi} \right) \\
&= \frac{1}{k \cdot 800\pi}
\end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe von f lautet:

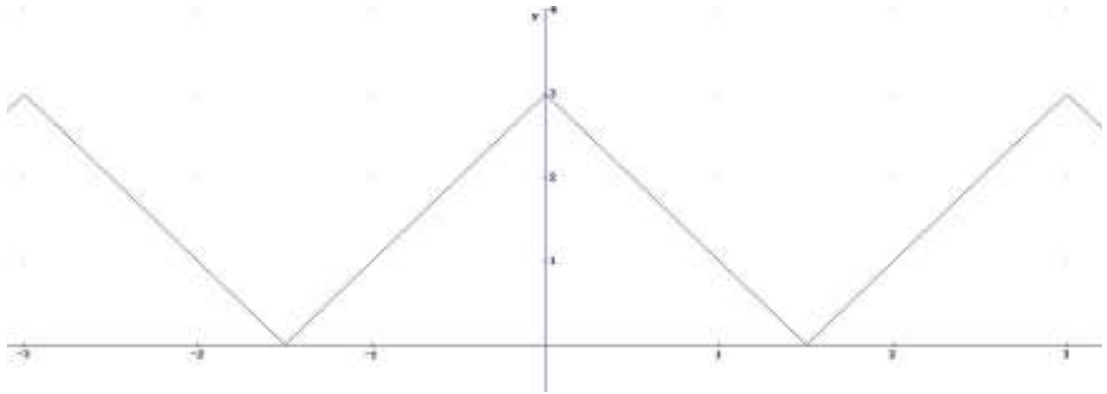
$$-\frac{1}{400} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 800\pi} \cdot \sin(k \cdot 800\pi \cdot x)$$

3)

Als erstes muss man die Periodenlänge T eintragen, diese entspricht bei periodischer Fortsetzung einer Funktion der Intervalllänge, also $T = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{für } -\frac{3}{2} \leq t \leq 0 \\ -2x+3 & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Als nächstes folgt wieder das Zeichnen des Funktionsgraphen, um eventuelle Vereinfachungen zu erkennen:



Da die Funktion im angegebenen Intervall gerade ist, entfällt in diesem Fall die Berechnung von b_k .

Berechnung der Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{3} \cdot \left(\int_{-\frac{3}{2}}^0 2x+3 \, dx \right) + \frac{2}{3} \cdot \left(\int_0^{\frac{3}{2}} -2x+3 \, dx \right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\int_{-\frac{3}{2}}^0 2x \, dx + \int_{-\frac{3}{2}}^0 3 \, dx \right) + \frac{2}{3} \cdot \left(-\int_0^{\frac{3}{2}} 2x \, dx + \int_0^{\frac{3}{2}} 3 \, dx \right) \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \left(x^2 \Big|_{-\frac{3}{2}}^0 + 3 \cdot x \Big|_{-\frac{3}{2}}^0 \right) + \frac{2}{3} \cdot \left(-x^2 \Big|_0^{\frac{3}{2}} + 3 \cdot x \Big|_0^{\frac{3}{2}} \right) \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{9}{4} + \frac{9}{2} \right) + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{9}{4} + \frac{9}{2} \right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{3} \cdot \int_{-\frac{3}{2}}^0 (2x+3) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right) dx + \frac{2}{3} \cdot \int_0^{\frac{3}{2}} (-2x+3) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right) dx \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \left(2 \cdot \int_{-\frac{3}{2}}^0 x \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right) dx - 3 \cdot \int_{-\frac{3}{2}}^0 \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right) dx \right. \\
 &\quad \left. - 2 \cdot \int_0^{\frac{3}{2}} x \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right) dx + 3 \cdot \int_0^{\frac{3}{2}} \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right) dx \right)
 \end{aligned}$$

Um die Rechnung übersichtlich zu halten, bietet sich hier eine Einzelbetrachtung der Integrale an.

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{3}{2}}^0 2x \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right) dx &= \frac{6x \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right)}{k \cdot 2\pi} \Bigg|_{-\frac{3}{2}}^0 - \frac{6}{k \cdot 2\pi} \cdot \int_{-\frac{3}{2}}^0 \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right) dx \\
&= -\frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \frac{3 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right)}{k \cdot 2\pi} \Bigg|_{-\frac{3}{2}}^0 \\
&= \frac{9 \cdot (1 - (-1)^k)}{k^2 \cdot 2\pi^2}
\end{aligned}$$

Um folgendes Integral zu berechnen, braucht man nur einzusetzen und muss nicht neu berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{3}{2}} 2x \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right) dx &= -\frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \frac{3 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right)}{k \cdot 2\pi} \Bigg|_0^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{9 \cdot ((-1)^k - 1)}{k^2 \cdot 2\pi^2}
\end{aligned}$$

Bei den restlichen Integralen verfährt man wie bei den ersten beiden, indem man eines berechnet und beim zweiten nur einsetzt.

$$\begin{aligned}
-3 \cdot \int_{-\frac{3}{2}}^0 \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right) dx &= -\frac{9 \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right)}{k \cdot 2\pi} \Bigg|_{-\frac{3}{2}}^0 = 0 \\
3 \cdot \int_0^{\frac{3}{2}} \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right) dx &= \frac{9 \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right)}{k \cdot 2\pi} \Bigg|_0^{\frac{3}{2}} = 0
\end{aligned}$$

Durch einsetzen der berechneten Werte erhält man jetzt a_k .

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{3} \cdot \left(2 \cdot \int_{-\frac{3}{2}}^0 x \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right) dx - 2 \cdot \int_0^{\frac{3}{2}} x \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right) dx \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{9 \cdot (1 - (-1)^k)}{k^2 \cdot 2\pi^2} - \frac{9 \cdot ((-1)^k - 1)}{k^2 \cdot 2\pi^2} \right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{9}{k^2 \cdot 2\pi^2} - \frac{9 \cdot (-1)^k}{k^2 \cdot 2\pi^2} - \frac{9 \cdot (-1)^k}{k^2 \cdot 2\pi^2} + \frac{9}{k^2 \cdot 2\pi^2} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{9}{k^2 \cdot \pi^2} - \frac{9 \cdot (-1)^k}{k^2 \cdot \pi^2} \right) = \frac{6}{k^2 \cdot \pi^2} - \frac{6 \cdot (-1)^k}{k^2 \cdot \pi^2} \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe von f lautet:

$$\frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{6}{k^2 \cdot \pi^2} - \frac{6 \cdot (-1)^k}{k^2 \cdot \pi^2} \right) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot x\right)$$

Die Reihe existiert nur für ungerade Werte von k .