Tutorium Mathe 2 MT

Aufgabenblatt: Integralrechnung (+ Lösungen)

a) Unbestimmtes Integral

1) Berechnen Sie $\int \frac{x^2}{5x+3}dx$.

In diesem Fall wendet man die Partialbruchzerlegung an. Dazu wird zunächst eine Polynomdivision durchgeführt, weil der Zähler den höheren Grad hat als der Nenner.

$$
\begin{array}{l}
x^2 \qquad : (5x+3) = \frac{x}{5} - \frac{3}{25} + \frac{9}{25\cdot(5x+3)} \\
\underline{-\left(x^2 + \frac{3x}{5}\right)} \\
\quad -\frac{3x}{5} \\
\quad \underline{-\left(-\frac{3x}{5} - \frac{9}{25}\right)} \\
\qquad \frac{9}{25}
\end{array}
$$

Aus dem Ergebnis der Polynomdivision kann ohne weitere Zwischenschritte der PZB nun das Integral berechnet werden:

$$\int \frac{x}{5} - \frac{3}{25} + \frac{9}{25\cdot(5x+3)}dx$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\int x\,dx - \frac{3}{25}\cdot\int 1\,dx + \frac{9}{25}\cdot\int\frac{1}{5x+3}dx$$

$$= \frac{x^2}{10} - \frac{3x}{25} + \frac{9}{25}\cdot\ln\left(|5x+3|\right) + c$$

2) Berechnen Sie $\int \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}dx$ mit der Substitution $t = \sqrt{x}$.

$SUB:$

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{1}{2t} \Rightarrow dx = 2t\cdot dt$$

Durch einsetzen der Substitution erhält man:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{t}{t^2+t}\cdot 2t\cdot dt &= \int \frac{2t^2}{t\cdot(t+1)}\,dt \\
&= 2\cdot\int \frac{t}{t+1}\,dt = 2\cdot\int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt \\
&= 2\cdot\left(\int 1dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt\right) \\
&= 2\cdot\left(t-\ln\left(\left|t+1\right|\right)\right)+c \\
&= 2\cdot\left(\sqrt{x}-\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right)+c
\end{aligned}
$$

3) Berechnen Sie $\int e^{-\sqrt{x}}dx$ mit der Substitution $t=\sqrt{x}$ und anschließender partieller Integration.

SUB:

$$t=\sqrt{x}\Rightarrow \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}\Rightarrow dx=2t\cdot dt$$

Durch einsetzen der Substitution erhält man:

$$
\begin{aligned}
\int e^{-t}\cdot 2t\,dt &= -e^{-t}\cdot 2t-\int -2\cdot e^{-t}dt \\
&= -2t\cdot e^{-t}+2\cdot\int e^{-t}dt \\
&= -2t\cdot e^{-t}-2\cdot e^{-t}+c \\
&= -2\cdot e^{-t}\cdot(t-1)+c \\
&= -2\cdot e^{-\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)+c
\end{aligned}
$$

b) Bestimmtes Integral

1) Berechnen Sie $\int_{0}^{\frac{1}{2}} x \cdot \sqrt{1-x^2}\,dx$ mit der Substitution $x=\sin(u)$.

$SUB:$

$x=\sin(u) \Rightarrow dx=\cos(u)\cdot du$

Beim Substituieren von bestimmten Integralen muss nicht rücksubstituiert werden. Es können genauso gut die Grenzen entsprechend umgeformt werden, dass auf eine Rücksubstitution verzichtet werden kann. In dieser Aufgabenstellung macht jenes jedoch wenig Sinn, weil die trigonometrischen Funktionswerte lieber aus dem Spiel gelassen werden sollten. Daher wird zunächst mit unbestimmten Integralen gerechnet und zum Schluss nach einer Rücksubstitution die Grenzen eingesetzt.
Durch einsetzen der Substitution erhält man:

$$\int \sin(u)\cdot\sqrt{1-\sin(u)^2}\cdot\cos(u)\,du$$

$$=\int \sin(u)\cdot\cos(u)^2\,du \quad \left(weil\ \sin^2(u)+\cos^2(u)=1\right)$$

$SUB:$

$$z=\cos(u) \Rightarrow dz=-\sin(u)\cdot du \Rightarrow du=-\frac{dz}{\sin(u)}$$

$$=\int \sin(u)\cdot z^2\cdot -\frac{dz}{\sin(u)}=-\int z^2 dz$$

$$=-\frac{z^3}{3}=-\frac{\left(\cos(u)\right)^3}{3}=-\frac{\left(\sqrt{1-\sin^2(u)}\right)^3}{3}=-\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{3}$$

$$\Rightarrow -\left.\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{3}\right|_{0}^{0,5}=-\frac{\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^3}{3}+\frac{1}{3}\approx 0,117$$

2) Berechnen Sie $\int_{e}^{e^{e^2}} \frac{\ln(\ln(x))}{x\ln(x)}\,dx$ mit der Substitution $y=\ln(\ln(x))$.

$SUB:$

$$y=\ln(\ln(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\cdot\ln(x)} \Rightarrow dx=x\cdot\ln(x)\cdot dy$$

Durch einsetzen der Substitution erhält man:

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{y}{x\ln(x)} \cdot x \cdot \ln(x) \cdot dy = \int_0^{\ln(2)} y\,dy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^2 = \frac{\ln(2)^2}{2}$$

3) Berechnen Sie $\int_1^5 \ln(x)\,dx$ durch partielle Integration.

Die Integration von $\ln(x)$ bedient sich einem einfachen Rechentrick, der es dann auch ermöglicht, mit der partiellen Ableitung zu rechnen.

$$\begin{aligned}
\int_1^5 \ln(x)\,dx &= \int_1^5 1 \cdot \ln(x)\,dx \\
&= x \cdot \ln(x)\Big|_1^5 - \int_1^5 x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\
&= 5 \cdot \ln(5) - x\Big|_1^5 \\
&= 5 \cdot \ln(5) - 4 \approx 4{,}05
\end{aligned}$$