

1. Bestimmen Sie den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  der Folgen.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+9}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{9}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n + \sqrt{2}}{2^n + 6^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6^n + \sqrt{2}) \cdot 6^{-n}}{(2^n + 6^n) \cdot 6^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{6^n}\right)}{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1\right)} = 1$$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+2} + \sqrt{5^n}}{5^n + 5^{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5^{n+2} + \sqrt{5^n}) \cdot 5^{-n}}{(5^n + 5^{n-1}) \cdot 5^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(5^2 + \frac{5^{\frac{n}{2}}}{5^n}\right)}{(1 + 5^{-1})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(25 + \frac{1}{5^{\frac{n}{2}}}\right)}{\left(1 + \frac{1}{5}\right)} = \frac{25 \cdot 5}{6} = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{4}} \cdot \left(n^{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + 1\right)}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{12}}}{n^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} = 0$$

2. Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren

a)  $2x^4 + 12x^3 - 44x + 30$

Durch Probieren erhält man eine Nullstelle bei  $x_0 = 1$ . Damit kann mit Hilfe des Horner Schemas vereinfacht werden:

|           |   |    |    |     |     |
|-----------|---|----|----|-----|-----|
|           | 2 | 12 | 0  | -44 | 30  |
| $x_0 = 1$ |   | 2  | 14 | 14  | -30 |
|           | 2 | 14 | 14 | -30 | 0   |

$$\rightarrow 2x^4 + 12x^3 - 44x + 30 = (x-1) \cdot (2x^3 + 14x^2 + 14x - 30)$$

Im vereinfachten Ausdruck befindet sich ebenfalls eine Nullstelle bei  $x_1 = 1$ . Das Polynom besitzt also an diesem Punkt eine doppelte Nullstelle und kann nun erneut mit dem Horner Schema vereinfacht werden.

|           |   |    |    |     |
|-----------|---|----|----|-----|
|           | 2 | 14 | 14 | -30 |
| $x_1 = 1$ |   | 2  | 16 | 30  |
|           | 2 | 16 | 30 | 0   |

$$\rightarrow 2x^4 + 12x^3 - 44x + 30 = (x-1)^2 \cdot (2x^2 + 16x + 30)$$

Nun kann nach Umstellung in die Normalform die p-q-Formel zur Ermittlung der weiteren Lösungen genutzt werden.

$$2x^2 + 16x + 30 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$x_{2,3} = -4 \pm \sqrt{16 - 15} = -4 \pm 1$$

$$x_2 = -5$$

$$x_3 = -3$$

Es ergibt sich daraus die folgende Darstellung in Linearfaktoren:

$$2x^4 + 12x^3 - 44x + 30 = 2 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+3) \cdot (x+5)$$

b)  $3x^5 + 3x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 81x + 81$

Durch Probieren ergibt sich  $x_0 = -1$ .

|            |   |    |     |     |    |     |
|------------|---|----|-----|-----|----|-----|
|            | 3 | 3  | -36 | -36 | 81 | 81  |
| $x_0 = -1$ |   | -3 | 0   | 36  | 0  | -81 |
|            | 3 | 0  | -36 | 0   | 81 | 0   |

$$\rightarrow 3x^5 + 3x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 81x + 81 = (x-1) \cdot (3x^4 - 36x^2 + 81)$$

Durch Substitution und anschließender Verwendung der p-q-Formel ergeben sich die restlichen Linearfaktoren.

$$\begin{aligned}
3x^4 - 36x^2 + 81 &= 0 & | :3 \\
x^4 - 12x^2 + 27 &= 0 & | \text{SUB } z = x^2 \\
z^2 - 12z + 27 &= 0 \\
z_{1,2} &= 6 \pm \sqrt{36 - 27} = 6 \pm 3 \\
z_1 = 3 &\rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \\
z_2 = 9 &\rightarrow x_{3,4} = \pm 3
\end{aligned}$$

Es ergibt sich daraus die folgende Darstellung in Linearfaktoren:

$$\begin{aligned}
&3x^5 + 3x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 81x + 81 \\
&= 3 \cdot (x+1) \cdot (x-3) \cdot (x+3) \cdot (x-\sqrt{3}) \cdot (x+\sqrt{3})
\end{aligned}$$

c)  $x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 37x - 30$

Durch Probieren ergibt sich  $x_0 = -1$

|            |   |    |    |    |     |     |
|------------|---|----|----|----|-----|-----|
|            | 1 | 4  | 4  | -6 | -37 | -30 |
| $x_0 = -1$ |   | -1 | -3 | -1 | 7   | 30  |
|            | 1 | 3  | 1  | -7 | -30 | 0   |

$$\rightarrow x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 37x - 30 = (x+1) \cdot x^4 + 3x^3 + x^2 - 7x - 30$$

Das reduzierte Polynom hat eine Nullstelle bei  $x_1 = 2$

|           |   |   |    |    |     |
|-----------|---|---|----|----|-----|
|           | 1 | 3 | 1  | -7 | -30 |
| $x_1 = 2$ |   | 2 | 10 | 22 | 30  |
|           | 1 | 5 | 11 | 15 | 0   |

$$\rightarrow x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 37x - 30 = (x+1) \cdot (x-2) \cdot x^3 + 5x^2 + 11x + 15$$

Das reduzierte Polynom hat eine Nullstelle bei  $x_2 = -3$

|            |   |    |    |     |
|------------|---|----|----|-----|
|            | 1 | 5  | 11 | 15  |
| $x_2 = -3$ |   | -3 | -6 | -15 |
|            | 1 | 2  | 5  | 0   |

$$\rightarrow x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 37x - 30 = (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x+3) \cdot x^2 + 2x + 5$$

Das Polynom hat  $x^2 + 2x + 5$  keine reellen Nullstellen. Daher kann der Ausdruck nicht weiter vereinfacht werden.

d)  $-2x^3 + 8x^2 - 8x$

Zunächst wird ein  $x$  ausgeklammert, dadurch ergibt sich  $x_0 = 0$ . Der Ausdruck kann anschließend mit der p-q-Formel gelöst werden.

$$x \cdot (-2x^2 + 8x - 8) \Rightarrow x_0 = 0$$

$$-2x^2 + 8x - 8 = 0 \quad | : -2$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 4} = 2$$

Die zugehörige Linearkombination lautet  $-2x \cdot (x - 2)^2$ .

e)  $-x^3 - 6x^2 - 12x - 8$

Durch Probieren erhält man  $x_0 = -2$ .

|            |    |    |     |    |
|------------|----|----|-----|----|
|            | -1 | -6 | -12 | -8 |
| $x_0 = -2$ |    | 2  | 8   | 8  |
|            | -1 | -4 | -4  | 0  |

$$\rightarrow -x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = (x + 2) \cdot (-x^2 - 4x - 4)$$

Nun werden die weiteren Lösungen mit Hilfe der p-q-Formel ermittelt.

$$-x^2 - 4x - 4 = 0 \quad | : -1$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 4} = -2$$

Die zugehörige Linearkombination lautet  $-(x + 2) \cdot (x + 2)^2 = -(x + 2)^3$ .

3. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke mit Hilfe der entsprechenden Rechenregeln

a)  $\ln(e^5) = 5$

b)  $\log_2(1024) = 10$

c)  $\log_4(\sqrt{64}) = \frac{1}{2} \cdot \log_4(64) = \frac{3}{2}$

d)  $\ln(\sqrt[5]{e^7}) = \frac{7}{5}$

$$e) \log_{12}(144) = 2$$

$$f) \lg(100 \cdot 10^{24}) = \lg(100) + \lg(10^{24}) = 26$$

$$g) \log_2 \left( \frac{2^{20}}{128} \cdot 512 \right) = \log_2(2^{20}) + \log_2(512) - \log_2(128) = 20 + 9 - 7 = 22$$

$$h) \ln(e^5) + \ln(\sqrt{e}) = \frac{11}{2}$$

i)

$$\begin{aligned} & \ln \left( e^{(\log_2(512) - \log_4(64))} \cdot \sqrt{e^7} \right) - \log_2 \left( \frac{16}{2^{10}} \right) \\ &= \left( \ln(e^6) + \ln(\sqrt{e^7}) \right) - \left( \log_2(16) - \log_2(2^{10}) \right) \\ &= \frac{19}{2} + \frac{12}{2} = \frac{31}{2} \end{aligned}$$

4. Berechnen Sie die resultierende Schwingung aus den beiden angegebenen Schwingungen

$$a) 5 \cdot \sin(2t), 4 \cdot \cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Umwandlung von cos-Schwingung in sin-Schwingung:

$$4 \cdot \cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) = 4 \cdot \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Berechnung von Amplitude und Phasenwinkel:

$$A = \sqrt{5^2 + 4^2 + 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{61} \approx 7,81$$

$$\tan(\varphi) = \frac{5 \cdot \sin(0) + 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{5 \cdot \cos(0) + 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \approx \frac{3,464}{7} \approx 0,495$$

$$\varphi = \arctan(0,495) = 0,46 \hat{=} 26,3^\circ$$

Die resultierende Schwingung lautet:

$$7,81 \cdot \sin(2t + 0,46)$$

$$\text{b) } 6 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), 2 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

Berechnung von Amplitude und Phasenwinkel:

$$A = \sqrt{6^2 + 2^2 + 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{6}\right)} = \sqrt{52} \approx 7,21$$

$$\tan(\varphi) = \frac{6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)} \approx \frac{7}{-0,866} \approx -8,082$$

$$\varphi = \arctan(-8,082) + \pi = 1,693 \hat{=} 97^\circ$$

Die resultierende Schwingung lautet:

$$7,21 \cdot \sin(\omega t + 1,693)$$