

Tutorium Mathe 2 MT

Aufgabenblatt: Anwendung der Integralrechnung (+ Lösungen)

- 1) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}$$

und der x-Achse.

Zunächst werden die Nullstellen im angegebenen Intervall ermittelt, weil evtl. negativ zur x-Achse liegende Flächen negiert werden müssen, um den Flächeninhalt zu ermitteln.

$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = (2k-1) \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Nullstelle bei } x = \frac{\pi}{2}$$

Das Integral muss aufgeteilt werden in zwei Intervalle, von denen eines negiert wird.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} dx$$

Es empfiehlt sich, nun zunächst die Stammfunktion für $f(x)$ zu bestimmen und dann die Grenzen einzusetzen, als mit beiden Integralen in einer langen Rechnung zu arbeiten.

$$\int \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} dx = \int \cos(x) \cdot \frac{1}{1 + \sin(x)} dx$$

SUB:

$$y = 1 + \sin(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(x) \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{\cos(x)}$$

$$\int \frac{\cos(x)}{y} \cdot \frac{dy}{\cos(x)} = \int \frac{1}{y} dy = \ln(|x|) + c = \ln(1 + \sin(x)) + c$$

Nun kann man die Grenzen einsetzen und erhält:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} dx = \ln(|1 + \sin(x)|) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln(2) - 0 = \ln(2)$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} dx = -\ln(|1 + \sin(x)|) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -(0 - \ln(2)) = \ln(2)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} dx = 2 \cdot \ln(2)$$

- 2) Berechnen Sie die Fläche, die von den Kurven $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = \sin(x)$ im Bereich $\left(\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}\right)$ eingeschlossen wird.

(Hinweis: $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

Aus dem Hinweis kann man ermitteln, dass sich die Graphen der beiden Funktionen genau an den Intervallgrenzen schneiden, durch eine Skizze kann man außerdem noch herausfinden, dass es keine weiteren Schnittpunkte im angegebenen Intervall gibt. Da es sich bei den Funktionen um denselben Funktionsverlauf handelt, der verschoben wird, um die andere Funktion zu erhalten, sind alle Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse identisch, müssen also nur einmal berechnet und dann verdoppelt werden.

Zunächst untersucht man wieder die Nullstellen, um sich die Rechnung zu vereinfachen:

$$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k \cdot \pi \Rightarrow \text{Nullstelle bei } x = \pi$$

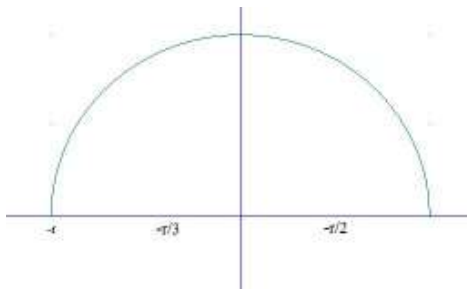
$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = (2k - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Nullstelle bei } \frac{\pi}{2}$$

Aus diesen Informationen kann nun die Integralberechnung entwickelt werden:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) - \cos(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) dx \right) = 2 \cdot \left(-\cos(x) - \sin(x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \cos(x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \right) \\ & = 2 \cdot \left(\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) - \cos(\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \\ & = 2 \cdot \left((0 - 1) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 1 \right) = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1 + 1) \\ & = 2 \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

- 3) Bestimmen Sie das Volumen einer „Kugelzone“ zwischen den Grenzen $x = -\frac{r}{3}$ und $x = \frac{r}{2}$.

Hinweis:



Bei dieser Aufgabe ist es zunächst wichtig, den richtigen Funktionsterm zu ermitteln, der einen Halbkreis mit Radius r beschreibt.

Dieser wird anhand der Gleichung für Halbkreise $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ durch Umstellen ermittelt.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow r^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Die Formel zur Berechnung des Volumens einer um die x-Achse rotierenden Funktion ist

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Da alle Platzhalter bestimmt sind, kann nun eingesetzt und aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_{-\frac{r}{3}}^{\frac{r}{2}} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx \\ &= \pi \cdot \left(r^2 \int_{-\frac{r}{3}}^{\frac{r}{2}} 1 dx - \int_{-\frac{r}{3}}^{\frac{r}{2}} x^2 dx \right) = \pi \cdot \left(r^2 \cdot x \Big|_{-\frac{r}{3}}^{\frac{r}{2}} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{r}{3}}^{\frac{r}{2}} \right) \\ &= \pi \cdot \left(r^2 \cdot \left(\frac{r}{2} + \frac{r}{3} \right) - \frac{1}{3} \cdot \left(\left(\frac{r}{2} \right)^3 - \left(-\frac{r}{3} \right)^3 \right) \right) = \pi \cdot \left(\frac{5r^3}{6} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{r^3}{8} + \frac{r^3}{27} \right) \right) \\ &= \pi \cdot \left(\frac{5r^3}{6} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{27r^3}{216} + \frac{8r^3}{216} \right) \right) = \pi \cdot \left(\frac{5r^3}{6} - \frac{35r^3}{648} \right) \\ &= \pi \cdot \left(\frac{540r^3}{648} - \frac{35r^3}{648} \right) \\ &= \frac{505}{648} \cdot \pi \cdot r^3 \end{aligned}$$

- 4) Berechnen Sie die Länge des Graphen der Funktion $f: [1, 8] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x)$.

Die nötige Formel zur Berechnung der Länge des Graphen lautet:

$$s = \int_1^8 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Zunächst wird daher die erste Ableitung von $f(x)$ berechnet.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

$$(f'(x))^2 = \left(\frac{x^2 - 1}{2x} \right)^2$$

Als nächstes muss man sich noch um die +1 unter der Wurzel kümmern. Am einfachsten bekommt man diese weg, indem man diese in die Ableitung mit einberechnet und so unter der Wurzel im Integral nur noch einen Quadratischen Term stehen hätte.

Dazu multipliziert man zunächst das Quadrat der Ableitung aus.

$$(f'(x))^2 = \left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2 = \frac{(x^2-1)^2}{4x^2} = \frac{x^4-2x^2+1}{4x^2}$$

An dieser Stelle ist es wichtig, dass man merkt, dass der Zähler der zweiten binomischen Formel entspricht. Dies kann man sich im Verlauf der folgenden Rechnung zu Nutze machen. Als nächstes stellt sich nun eine entscheidende Frage, nämlich: Wie kann hier +1 addiert werden?

Dies muss anhand des Nenners des Bruchs ermittelt werden (Ein Bruch ergibt 1, wenn Zähler und Nenner gleich sind), dessen Wert man hinzuaddieren muss.

$$(f'(x))^2 + 1 = \frac{x^4-2x^2+1+4x^2}{4x^2} = \frac{x^4+2x^2+1}{4x^2}$$

Wenn man nun genau hinsieht, merkt man, dass durch das Addieren von 1 aus der zweiten binomischen Formel die Erste geworden ist und man daher wieder zu einem quadratischen Ausdruck umformen kann

$$(f'(x))^2 + 1 = \frac{x^4+2x^2+1}{4x^2} = \frac{(x^2+1)^2}{4x^2} = \left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2$$

Jetzt kann ohne größere Schwierigkeiten integriert werden.

$$\begin{aligned} s &= \int_1^8 \sqrt{\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2} dx = \int_1^8 \frac{x^2+1}{2x} dx \\ &= \int_1^8 \frac{x^2}{2x} dx + \int_1^8 \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_1^8 x dx + \frac{1}{2} \cdot \int_1^8 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{4} \Big|_1^8 + \frac{\ln(x)}{2} \Big|_1^8 \\ &= \left(\frac{64}{4} - \frac{1}{4}\right) + \frac{\ln(8)}{2} \\ &= \frac{63 - 2 \cdot \ln(8)}{4} \end{aligned}$$