

Tutorium Mathe 2 MT

Aufgabenblatt: Uneigentliche Integrale (+ Lösungen)

1) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_2^{\infty} \frac{2x}{(1-x^2)^2} dx$.

(Hinweis: Substitution $y = 1 - x^2$)

SUB:

$$y = 1 - x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2x \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{-2x}$$

Mit dem Einsetzen der Substitution ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{2x}{(1-x^2)^2} dx &= \int_2^b \frac{2x}{y^2} \cdot \frac{dy}{-2x} = - \int_2^b \frac{1}{y^2} dy = \frac{1}{y} \Big|_2^b = \frac{1}{1-x^2} \Big|_2^b \\ &= \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{3} \\ &\rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} \frac{1}{e^{2x} + 1} dx$.

(Hinweis: Substitution $y = e^{2x}$)

SUB:

$$y = e^{2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \cdot e^{2x} \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{2 \cdot e^{2x}}$$

Mit dem Einsetzen der Substitution ergibt sich:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^{2x} + 1} dx = \int_0^b \frac{1}{y+1} \cdot \frac{dy}{2 \cdot y} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^b \frac{1}{y^2 + y} dy$$

An dieser Stelle muss man die Partialbruchzerlegung anwenden, um den Ausdruck zu vereinfachen. Dazu bestimmt man zunächst die Nenner-Nullstellen und stellt dann den Ansatz auf:

$$y^2 + y = 0 \rightarrow y_1 = 0$$

$$y \cdot (y+1) = 0 \rightarrow y_2 = -1$$

$$\frac{1}{y^2 - y} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1}$$

$$1 = A \cdot (x+1) + B \cdot x$$

Durch Einsetzen von $x = 0$ und $x = -1$:

$$1 = A$$

$$1 = -B$$

Man erhält nach dem Einsetzen dieses Ansatzes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^b \frac{1}{y} dy - \int_0^b \frac{1}{y+1} dy \right) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\ln(|y|) \Big|_0^b - \ln(|y+1|) \Big|_0^b \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\ln(e^{2x}) \Big|_0^b - \ln(e^{2x} + 1) \Big|_0^b \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\ln(e^{2b}) - \ln(1) - \ln(e^{2b} + 1) + \ln(2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\ln\left(\frac{e^{2b}}{e^{2b} + 1}\right) + \ln(2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\ln\left(\frac{e^{2b} + 1 - 1}{e^{2b} + 1}\right) + \ln(2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\ln\left(1 - \frac{1}{e^{2b} + 1}\right) + \ln(2) \right) \\ &\rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\ln\left(1 - \frac{1}{e^{2b} + 1}\right) + \ln(2) \right) = \frac{1}{2} \cdot \ln(2) \end{aligned}$$

3) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 - x} dx$.

Der Ansatz ist hier die Partialbruchzerlegung:

Nullstellen des Nenners:

$$x^2 - x = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

$$x \cdot (x - 1) = 0 \rightarrow x_2 = 1$$

Aufstellen des Ansatzes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} \\ 1 &= A \cdot (x - 1) + B \cdot x \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $x = 0$ und $x = 1$ ergibt sich:

$$1 = -A$$

$$1 = B$$

So erhält man:

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 - x} dx &= -\int_2^b \frac{1}{x} dx + \int_2^b \frac{1}{x-1} dx = \ln(|x|) \Big|_2^b + \ln(|x-1|) \Big|_2^b \\
&= -\ln(|b|) + \ln(2) + \ln(|b+1|) - \ln(1) \\
&= \ln(2) + \ln\left(\frac{|b+1|}{|b|}\right) \\
&= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{|b|}\right) \\
&\rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{|b|}\right) = \ln(2)
\end{aligned}$$

4) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

SUB:

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \Leftrightarrow dx = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot dy = 2y \cdot dy$$

Mit dem Einsetzen der Substitution ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^b \frac{e^{-y}}{y} \cdot 2y \cdot dy = 2 \cdot \int_1^b e^{-y} dy = -2 \cdot e^{-\sqrt{x}} \Big|_1^b = -2 \cdot e^{-\sqrt{b}} + 2 \cdot e^{-\sqrt{1}} \\
&\rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} -2 \cdot e^{-\sqrt{b}} + 2 \cdot e^{-1} = 2 \cdot e^{-1} = \frac{2}{e}
\end{aligned}$$