

Aufgabenblatt: Fourier Transformationen (Teil 2) (+ Lösungen)

- 1) Berechnen Sie die Fourier Transformierte der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) = \begin{cases} e^{-5t}, & \text{falls } -3 \leq t < 0 \\ e^{-3t}, & \text{falls } 0 \leq t < 5 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left( \int_{-3}^0 e^{-5t} \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_0^5 e^{-3t} \cdot e^{-i\omega t} dt \right) \\ 2\pi \cdot \hat{f}(\omega) &= \int_{-3}^0 e^{t(-5-i\omega)} dt + \int_0^5 e^{t(-3-i\omega)} dt \\ &= -\frac{e^{(-5-i\omega)t}}{5+i\omega} \Big|_{-3}^0 - \frac{e^{(-3-i\omega)t}}{3+i\omega} \Big|_0^5 \end{aligned}$$

Damit man das Ergebnis als Realteil und Imaginärteil schreiben kann, müssen die imaginären Einheiten in den Nennern der Brüche verschwinden. Dies wird durch konjugiert komplexes Erweitern erreicht.

$$\begin{aligned} &= -\frac{5-i\omega}{25+\omega^2} (1-e^{15+3i\omega}) - \frac{3-i\omega}{9+\omega^2} (e^{-15-5i\omega} - 1) \\ &= \frac{i\omega-5}{25+\omega^2} (1-e^{15} \cdot (\cos(3\omega) + i \sin(3\omega))) \\ &\quad + \frac{i\omega-3}{9+\omega^2} (e^{-15} \cdot (\cos(5\omega) - i \sin(5\omega)) - 1) \\ &= \frac{i\omega-5 \cdot (1-e^{15} \cdot \cos(3\omega) - e^{15} \cdot i \sin(3\omega))}{25+\omega^2} \\ &\quad + \frac{i\omega-3 \cdot (e^{-15} \cdot \cos(5\omega) - i \sin(5\omega) - 1)}{9+\omega^2} \\ &= \frac{i\omega - i\omega \cdot e^{15} \cdot \cos(3\omega) + e^{15} \cdot \omega^2 \cdot \sin(3\omega)}{25+\omega^2} + \frac{-5 + 5 \cdot e^{15} \cdot \cos(3\omega) + 5 \cdot e^{15} \cdot i \sin(3\omega)}{25+\omega^2} \\ &\quad + \frac{i\omega \cdot e^{-15} \cdot \cos(5\omega) + \omega \cdot \sin(5\omega) - i\omega}{9+\omega^2} + \frac{-3 \cdot e^{-15} \cdot \cos(5\omega) + 3i \sin(5\omega) + 3}{9+\omega^2} \end{aligned}$$

Die Bruchsummanden werden nun nach Realteil und Imaginärteil getrennt. Der Übersicht halber sind die Multiplikationszeichen weggelassen worden.

$$= \left( \frac{5(e^{15} \cos(3\omega) - 1) + e^{15} \omega^2 \sin(3\omega)}{25 + \omega^2} + \frac{3(1 - e^{-15} \cos(5\omega)) + e^{-15} \omega \sin(5\omega)}{9 + \omega^2} \right) + i \left( \frac{\omega(1 - e^{15} \cos(3\omega)) + 5e^{15} \sin(3\omega)}{25 + \omega^2} + \frac{\omega(e^{-15} \cos(5\omega) - 1) + 3e^{-15} \sin(5\omega)}{9 + \omega^2} \right)$$

Zum Schluss müssen nun noch die  $2\pi$  verrechnet werden, welche am Anfang auf die linke Seite gezogen worden sind, um die Rechnung zu vereinfachen.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{5(e^{15} \cos(3\omega) - 1) + e^{15} \omega^2 \sin(3\omega)}{25 + \omega^2} + \frac{3(1 - e^{-15} \cos(5\omega)) + e^{-15} \omega \sin(5\omega)}{9 + \omega^2} \right) + \frac{i}{2\pi} \left( \frac{\omega(1 - e^{15} \cos(3\omega)) + 5e^{15} \sin(3\omega)}{25 + \omega^2} + \frac{\omega(e^{-15} \cos(5\omega) - 1) + 3e^{-15} \sin(5\omega)}{9 + \omega^2} \right)$$

2) Berechnen Sie die Fourier Transformierte der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) = e^{-|t|}$$

$$(\text{Hinweis: } \int e^{ax} \cdot \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cdot \cos(bx) + b \cdot \sin(bx) + C))$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left( \int_{-\infty}^0 e^t \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot e^{-i\omega t} dt \right) \\ 2\pi \cdot \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^0 e^{t(1-i\omega)} dt + \int_0^{\infty} e^{t(-1-i\omega)} dt \\ &= \frac{e^{t(1-i\omega)}}{1-i\omega} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{t(-1-i\omega)}}{1+i\omega} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} \\ 2\pi \cdot \hat{f}(\omega) &= \frac{(1-i\omega) + (1+i\omega)}{1+\omega^2} = \frac{2}{1+\omega^2} \\ \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\pi \cdot (1+\omega^2)} \end{aligned}$$

3) Berechnen Sie die Fourier Transformierte der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0 \\ 2t, & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{falls } t > 1 \end{cases}$$

Lösung:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^1 2t \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$2\pi \cdot \hat{f}(\omega) = \frac{i \cdot 2t \cdot e^{-i\omega t}}{\omega} \Big|_0^1 - \frac{2i}{\omega} \int_0^1 e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{2i \cdot e^{-i\omega}}{\omega} - \frac{2i}{\omega} \cdot \frac{i \cdot e^{-i\omega t}}{\omega} \Big|_0^1$$

$$= \frac{2i \cdot e^{-i\omega}}{\omega} + \frac{2e^{-i\omega} - 2}{\omega^2}$$

$$= \frac{2i \cdot (\cos(\omega) - i \sin(\omega))}{\omega} + \frac{2 \cdot (\cos(\omega) - i \sin(\omega))}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2}$$

$$= \frac{2 \cdot \cos(\omega)}{\omega^2} + \frac{2 \cdot \sin(\omega)}{\omega} - \frac{2}{\omega^2} + i \cdot \left( \frac{2 \cdot \cos(\omega)}{\omega} - \frac{2 \cdot \sin(\omega)}{\omega^2} \right)$$