1 Zahlenbereiche

1.1 Menge und Element

$x \in M$: Objekt x ist der Menge M

$x \notin M$: Objekt x ist kein Element der Menge M

M = N : M und N haben dieselben Elemente, d.h. aus $x \in M$ folgt $x \in N$ und umgekehrt.

aufzählende Charakterisierung:

$\{a, b, c, ...\}$ (Bsp.: Menge der Buchstaben des lateinischen Alphabets)

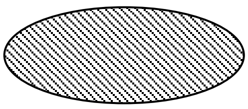
beschreibende Charakterisierung

$\{x \mid x = \mathbb{N}\}$ (Menge aller x für die gilt $x = \mathbb{N}$)

Falls alle x schon einer Menge angehören:

$\{x \in M \mid x = \mathbb{N}\}$ (Menge aller x der Menge M für die gilt $x \in N$)

Venn - Diagramme



Menge M

Beispiele:

1) - M sei die Menge der Buchstaben im Wort „Teekanne“
- N sei die Menge der Buchstaben im Wort „Kante“

$$M = \{t, e, e, k, a, n, n, e\} \Leftrightarrow M = \{t, e, k, a, n\} \Leftrightarrow \{a, e, k, n, t\}$$
$$N = \{k, a, n, t, e\} \Leftrightarrow \{a, e, k, n, t\}$$
$$\Rightarrow M = N$$

2)
$\{1, 2, 3, 4, ..., 100\}$ (Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 100)

3)
- B sei die Menge der Buchstaben des lateinischen Alphabets

$$\{x \in B \mid x \text{ ist ein Vokal}\} = \{a, e, i, o, u\}$$

Definition:

$\emptyset$ = Menge aller x aus M für die gilt, x ist nicht Element von M
$\emptyset = \{x \in M \mid x \notin M\}$

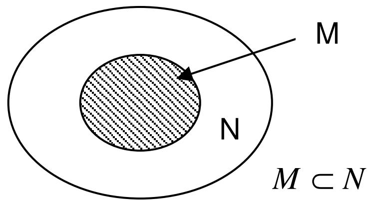
$\emptyset$ heißt leere Menge und hat keine Elemente.

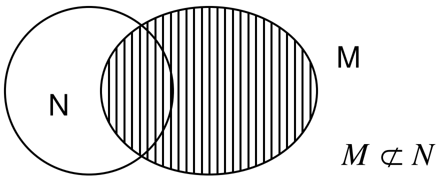
Definition:

Eine Menge M heißt Teilmenge der Menge N, in Zeichen $M \subseteq N$, wenn jedes Element von M auch in N enthalten ist.

$M \subset N$ gilt im Fall $M \subseteq N$ und $M \neq N$ und wird als echte Teilmenge bezeichnet.

Darstellung im Venn - Diagramm von Teilmengen:





Beispiel:

1) S sei die Menge der Säugetiere und W die Menge der Wirbeltiere. Es gilt

$$\Rightarrow S \subset W$$

2) Für jede Menge M gilt $\emptyset \subseteq M$.

1.2 Die natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Definition:

Eine Menge M heißt endlich, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, sodass M genau n Elemente enthält.

Anzahl oder Mächtigkeit von M

$$|M| = n \qquad (|M| \text{ ist die Menge der Elemente von M})$$

Auch die leere Menge soll endlich heißen

$$\Rightarrow 0 = |\varnothing|$$

$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,4,...\}$

Beispiele:

1) $$|\{t,e,e,k,a,n,n,e\}| = 5$$

2) - M sei die Menge aller $\mathbb{N}$ zwischen 1 und 100, bei denen die Ziffer 7 in der Dezimaldarstellung mehrmals vorkommt.

$$|M| = 28$$

<u>1.3 Mengenoperation</u>

<u>Definition:</u>

$M \cap N = \{x \mid x \in M \ und \ x \in N\}$ (<u>Durchschnitt</u> der Mengen M und N)
M und N heißen <u>disjunkt</u>, wenn $M \cap N = \varnothing$.

Beispiel:

1)

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 \ ist \ ein \ Teiler \ von \ n\} = \{3,6,9,12,15,18,...\}$$
$$N = \{n \in \mathbb{N} \mid 7 \ ist \ ein \ Teiler \ von \ n\} = \{7,14,21,28,35,42,...\}$$

$$\Rightarrow M \cap N = \{n \in \mathbb{N} \mid 21 \ ist \ ein \ Teiler \ von \ n\} = \{21,42,63,...\}$$

<u>Definition:</u>

$M \cup N = \{x \mid x \in M \ oder \ x \in N\}$ (<u>Vereinigung</u> der Mengen M und N)

Beispiel:

1) - M sei die Menge der Buchstaben im Wort „Schere“ und N die Menge der Buchstaben im Wort „Stuhl“.

$$M \cup N = \{s,c,h,u,l,t,e,r\}$$

Durchschnitt und Vereinigung für mehr als zwei Mengen:

$$M \cap N \cap P = \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N \text{ und } x \in P\}$$
$$M \cup N \cup P = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N \text{ oder } x \in P\}$$

<u>Definition:</u>

$M \setminus N$ (M ohne N)

$M \setminus N = \{x \in M \mid x \notin N\}$ (<u>Differenzmenge</u> von M und N)

Falls $M \subseteq N$ schreibt man $C_M(N) = M \setminus N$ und liest:
Das <u>relative Komlement</u> von N bezüglich M.

Beispiele:

1) - U sei die Menge der ungeraden $\mathbb{N}$ und P die Menge der Primazahlen, dann gilt $P \setminus N = \{2\}$

2) $C_{\mathbb{N}_0}(\{0\}) = \mathbb{N}$

Beispiel 1.3.6

- M sei die Menge aller Autos
- $U = \{x \in M \mid x \text{ hat Unterbodenschutz}\}$
- $L = \{x \in M \mid x \text{ hat lange Lebensdauer}\}$
- $V = \{x \in M \mid x \text{ hat ein kleines Verhältnis von Hubraum zu Leistungsstärke}\}$
- $G = \{x \in M \mid x \text{ ist besonders unfallgefährdet}\}$
- $B = \{x \in M \mid x \text{ lässt sich billig versichern}\}$

Behauptung: $B \subseteq U$

Beweis:

$$B \subseteq C_M(G)$$
$$C_M(G) \subseteq C_M(V)$$
$$V \cup L = M$$
$$\Rightarrow C_M(V) = L$$
$$\Rightarrow C_M(L) = C_M(U)$$
$$\Rightarrow L \subseteq U$$
$$\Rightarrow B \subseteq L$$

De Morgan'sche Regeln

A, B seien Teilmengen einer Menge M. Dann gilt

1) $$C_M(A \cup B) = C_M(A) \cap C_M(B)$$

2) $$C_M(A \cap B) = C_M(A) \cup C_M(B)$$

<u>1.4 Rechenoperationen in der Menge der natürlichen Zahlen</u>

Es gibt für zwei Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ immer drei Möglichkeiten, im Bezug auf ihre Werte:

1) m > n

2) m = n

3) m < n

Addition:

Sind M und N endliche Mengen mit $M \cap N = \varnothing$, so gilt

$$|M \cup N| = |M| + |N|$$

<u>Definition:</u>
m und n seien natürliche Zahlen mit m < n. Dann gibt es genau eine Zahl $d \in \mathbb{N}$, sodass gilt

m + d = n

Dann heißt d die Differenz von m und n und wird als

m – n = d ausgedrückt.

M sei eine endliche Menge und $M \subseteq N$. Dann gilt

$$|C_M(N)| = |M \setminus N| = |M| - |N|$$

Satz:
Sind M und N endliche Mengen, so gilt

$$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|$$

Insbesondere erhält man daraus:

$$|M \cup N| \le |M| + |N|$$

Beispiel 1.4.1

M sei die Menge der hergestellten Geräte

$$A = \{x \in M \mid Element\ a\ in\ Ordnung\}$$
$$B = \{x \in M \mid Element\ b\ in\ Ordnung\}$$
$$C = \{x \in M \mid Element\ c\ in\ Ordnung\}$$
$$D = \{x \in M \mid Element\ d\ in\ Ordnung\}$$

Menge der defekten Geräte:

$$\begin{aligned}
&C_M(A) \cup C_M(B) \cup C_M(C) \cup C_M(D) \\
&= C_M(A \cap B) \cup C_M(C \cap D) \\
&= C_M(A \cap B \cap C \cap D)
\end{aligned}$$

$|M| = 100\ Geräte$

gesucht:

$$\begin{aligned}
&|C_M(A \cap B \cap C \cap D)| = |M| - |A \cap B \cap C \cap D| \\
&= |C_M(A) \cup C_M(B) \cup C_M(C) \cup C_M(D)| \\
&\le |C_M(A)| + |C_M(B)| + |C_M(C)| + |C_M(D)| \\
&\le 27
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&100 - |A \cap B \cap C \cap D| \le 27 \\
&\Leftrightarrow |A \cap B \cap C \cap D| \ge 73
\end{aligned}$$

Antwort: Mindestens 73% der Geräte arbeiten einwandfrei.

Multiplikation in $\mathbb{N}$

$m * n = n + n + n + n + n + n + n + ... + n$ (m wird n mal addiert)

Beispiel: (Tennisturnier)

$$Mannschaft\ A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$$
$$Mannschaft\ B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$$

Beispiel einer Partie: (A_2, B_3)

Wie viele Partien finden statt, wenn jeder gegen jeden antritt?

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A\ und\ b \in B\} \Leftrightarrow |A| \times |B| = |A| * |B| = 20\ Partien$$

<u>Definition:</u>

$M \times N = \{(x,y) \mid x \in M\ und\ y \in N\}$ heißt das kartesiche Produkt der Mengen M und N.

Sind M und N endliche Mengen, so gilt

$$|M \times N| = |M| * |N|$$

<u>1.5 Die Menge der ganzen Zahlen</u>

m + x = n ist in $\mathbb{N}_0$ nur für m $\leq$ n lösbar.

$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \vee \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ heißt Menge der ganzen Zahlen.

<u>Satz:</u>
Zu zwei ganzen Zahlen a, b gibt es genau eine ganze Zahl x, so dass a + x = b gilt.
x heißt die Differenz von a und b, in Zeichen x = b - a.

Rechenregeln:

a - b = a + (-b)

- (- a) = a

- (a + b) = -a – b

- (a - b) = -a + b

Multiplikation in $\mathbb{Z}$:

(- (m) * n = -(m * n)

m * (-n) = -(m * n)

(-m) * (-n) = m * n

Dabei sind m, n $\in \mathbb{N}_0$

Definition
b $\in \mathbb{Z}$ heißt teilbar durch a $\in \mathbb{Z}$, wenn es ein x $\in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$a * x = b$$

1.6 Die Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n}$ I m $\in \mathbb{Z}$ und n $\in \mathbb{N}\}$ heißt die Menge der rationalen Zahlen

Satz:
Jede lineare Gleichung a x + b = c für vorgegebene a, b, c $\in \mathbb{Z}$ mit a $\neq$ 0 besitzt in der Menge $\mathbb{Q}$ eine eindeutig bestimmte Lösung x.

Umwandlung von Quotienten in Dezimalbrüche

$$\frac{4}{125} = \frac{4*8}{125*8} = \frac{32}{1000} = \frac{3}{100} + \frac{2}{1000} = 0{,}032$$

$\frac{153}{2475} = 0{,}06\overline{18} =$ 0,06181818181818… (periodischer Dezimalbruch)

Umwandlung eines Dezimalbruchs in einen Quotienten

$$x = 0{,}123\overline{56}$$
$$100x = 12{,}356\overline{56}$$

$$100x = 12{,}356\overline{56}$$
$$-x = -0{,}123\overline{56}$$
$$\Rightarrow 99x = 12{,}233$$

$$x = \frac{12{,}233}{99} = \frac{12233}{99000}$$

Satz:
Jede rationale Zahl lässt sich durch einen abbrechenden oder periodischen Dezimalbruch darstellen.

1.7 Die Menge der reellen Zahlen

Ein nicht abbrechender, nicht periodischer Dezimalbruch stellt eine <u>irrationale</u> Zahl dar.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q}$ v {x | x ist irrational} heißt Menge der reellen Zahlen.

Beispiel:
Die positive Lösung $\sqrt{2}$ der Gleichung $x^2 = 2$ ist irrational.

Beweis:
Annahme $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ => Es gibt einen vollständig gekürzten Buch $\frac{p}{q}$ mit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{N})$

=> $p = \sqrt{2} * q$
=> $p^2 = 2 * q^2$
=> p^2 ist gerade => p ist gerade
=> p^2 ist durch 4 teilbar
=> $2q^2$ ist durch 4 teilbar
=> q^2 ist durch 2 teilbar (also gerade)
=> q ist gerade
=> p und q enthalten den Faktor 2

$\Rightarrow \frac{p}{q}$ ist vollständig gekürzt!

2 Rechnen in $\mathbb{R}$

<u>2.1 Grundlegende Rechenregeln</u>

$a + b = b + a$	(Kommutativgesetz d. Addition)
$(a + b)+c = a+b+c$	(Assoziativgesetz d. Addition)
$a + 0 = a$	(Die "0", "Das neutrale Element")
$a + (- a) = 0$	(inverses Element (-a) von a)
$a * b = b * a$	(Kommutativgesetz d. Multiplikation)
$(a * b)* c = a * b * c$	(Assoziativgesetz d. Multiplikation)
$a * 1 = a$	(1 ist das neutrale Element der Multiplikation)
$a * \frac{1}{a} = 1$	($\frac{1}{a}$ ist für $a \neq 0$ das inverse Element d. Multiplikation)

a*(b + c) = ab + bc (Distributivgesetz d. Addition & d. Multiplikation)

Es gilt: PUNKTRECHNUNG vor STRICHRECHNUNG => a* (b + c) = ab + ac

2.2 Rechnen mit Klammern

1. Klammernregel: a + (b + c) + d = a + b + c + d
a - (b - c + d) = a - b + c - d (das - der Klammer bleibt!!!)

Setzen von Klammern: - 38 - 45 -17 + 8 + 13 = - (38+45+17) +8 + 13

2. Klammernregel:

$$\left(\frac{2}{3}a-\frac{4}{5}b+\frac{8}{7}c\right)*15d=10ad-12bd+\frac{120}{7}cd$$

Ausklammern:

$$5*\left(\frac{7}{4}x-\frac{23}{8}y+\frac{22}{7}z\right)-2*\left(x-\frac{1}{4}y+\frac{5}{2}z\right)$$

$$=\frac{35}{4}x-\frac{115}{8}y+\frac{110}{7}z-2x+\frac{1}{2}y-5z$$
$$=\left(\frac{35}{4}-2\right)x-\left(\frac{115}{8}-\frac{1}{2}\right)y+\left(\frac{110}{7}-5\right)z$$
$$=\frac{27}{4}x-\frac{111}{8}y+\frac{75}{7}z$$

3. Klammernregel: (a + b) * (c + d) = ac + ad+ bc+ bd

(a - b) * (c + d) = ac + ad – bc – bd

(a + b) * (c - d) = ac - ad + bc - bd

Ausklammern:

$$
\begin{aligned}
&10xu+6xw-15yu-9yw\\
&=2x*(5u+3w)-3y*(5u+3w)\\
&=(2x-3y)*(5u+3w)
\end{aligned}
$$

4. Klammerregel:

$$
\begin{aligned}
&2\big(x-4\big(y-x+3(x-y)+5\big)-z\big)\\
&=2x-8\big(y-x+3(x-y)+5\big)-2z\\
&=2x-8y+8x-24(x-y)-40-2z\\
&=2x-8y+8x-24x+24y-40-2z\\
&=-14x+16y-2z-40
\end{aligned}
$$

2.3 Bruchrechnung

Erweitern und Kürzen:

$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ und $\frac{a}{b}=\frac{a:d}{b:d}$

$$\frac{xa+xb+ya+yb}{xa-xb+ya-yb}=\frac{x(a+b)+y(a+b)}{x(a-b)+y(a-b)}=\frac{(a+b)(x+y)}{(a-b)(x+y)}=\frac{a+b}{a-b}$$

Addition und Subtraktion von Brüchen

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$$

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

Multiplikation und Division von Brüchen

$$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}*\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

2.4 Das Summen- & Produktzeichen

$$\sum_{i=0}^{n}a_i=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$$

i heißt der Summationsindex
1 und n heißen die Summationsgrenzen

Ändern des Summationsindex und der Grenzen

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{i=0}^{3} a_{i+1} = \sum_{i=5}^{8} a_{i-4}$$

Beispiele:

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+4+...+n$$

$$\sum_{l=2}^{9} 10 = 10+10+10+10+10+10+10+10 = 80$$

Rechenregeln:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (ca_i) = c * \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Beispiele:

$$\sum_{k=3}^{6} k^2 = 9+16+25+36 = 86$$

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{j}{j+1} = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4} = \frac{23}{12}$$

$$\sum_{m=1}^{5}\left(2m+3m^2-4\right) = 2\sum_{m=1}^{5} m + 3\sum_{m=1}^{5} m^2 - 4\sum_{m=1}^{5} 1$$
$$= 2(1+2+3+4+5)+3(1+4+9+16+25)-4*5$$
$$= 2+4+6+8+10+3+12+27+48+75-20$$
$$= 175$$

$$\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{3}{j}-\frac{4}{j+1}\right) = 3\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{j} - 4\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{j+1}$$
$$= 3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) - 4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$$
$$= \frac{67}{60}$$

$$1+2+3+4+5+\ldots+998+999+1000$$
$$1000+999+998+997+\ldots+3+2+1$$
$$1001+1001+1001+1001+\ldots+1001+1001$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{1000} n = \frac{1000*1001}{2} = 500500$$

Aus der Rechnung kann man folgern, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$ ist.

Zusammenfassung von Summen

$$\sum_{i=1}^{50}\left(4i+3i^2+20\right) + \sum_{i=1}^{50}(3i-4i^2+10) + \sum_{i=1}^{50}\left(30+7i+i^2\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{50} 4i+3i^2-20+3i-4i^2+10+30+7i+i^2$$
$$= \sum_{i=1}^{50}(14i+20)$$
$$= 14\sum_{i=1}^{50} i + 20\sum_{i=1}^{50} 1$$
$$= 14*\frac{50*51}{2} + 20*50 = 17850+1000 = 18850$$

Höherer Startindex (Bsp. k=3)

$$\sum_{k=3}^{100} k = \sum_{k=1}^{98} k+2 = \sum_{k=1}^{98} k + 2\sum_{k=1}^{98} 1$$
$$= \frac{98*99}{2} + 2*98$$
$$= 4851 + 196$$
$$= 5047$$

Produkte

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 * a_2 * \ldots * a_n$$

i ist der Produktindex
1 und n sind die Produktgrenzen

Beispiele

a) $$\prod_{i=1}^{100} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{3}{4} * \frac{4}{5} * \ldots * \frac{99}{100} * \frac{100}{101} = \frac{1}{101}$$

b) $$\prod_{i=10}^{80} \left(i^2 - 400\right) = 0$$
$$\left(i = 20 \Rightarrow i^2 - 400 \Rightarrow 400 - 400 = 0\right)$$

2.5 Potenzen mit natürlichem Exponenten

Für a $\in \mathbb{R}$ und n $\in \mathbb{N}$ definiert man

$$a^n = \prod_{k=1}^{n} a = a * a * a * \ldots * a$$

a heißt Basis und n Exponent der Potenz a^n

Falls a < 0 gilt	$a^n > 0$ (gerade n)
	$a^n < 0$ (ungerade n)
=>	$(-1)^n = 1$ für gerade n
	$= -1$ für ungerade n

$$a^m * a^n = (a*a*a*a*...*a)*(a*a*a*a*...*a) = a^{m+n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^m * a^m * a^m * a^m * ... * a^m = a^{m*n}$$

$$\left(a*b\right)^n = \left(a*b\right)*\left(a*b\right)*\left(a*b\right)*...*\left(a*b\right)$$
$$= (a*a*a*a*...*a)*(b*b*b*b*...*b)$$
$$= a^n * b^n$$

Potenz Gesetze

Für alle a $\in$ $\mathbb{R}$ und b $\in$ $\mathbb{R}$ und für alle m, n $\in$ $\mathbb{N}$ gilt

(1) $a^{m+n} = a^m * a^n$

(2) $\left(a^m\right)^n = a^{m*n}$

(3) $\left(ab\right)^n = a^n * b^n$

(4) $b^n * \left(\frac{a}{b}\right)^n = a^n$

Beispiel:

$$2^{32} = 2^{2*16} = \left(2^2\right)^{16} = 4^{16} = 4^{2*8} = \left(4^2\right)^8 = 16^8 = \left(16^2\right)^4$$
$$= 256^4 = \left(256^2\right)^2 = 65.536^2 = 4.294.967.296$$

Beweis für $a^0 = 1$

$$a = a^1 = a^{0+1} = a^1 * a^0$$
$$\Rightarrow a = a * a^0$$
$$\Rightarrow 1 = a^0$$

<u>Definition:</u>
Für a $\in$ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ setzt man $a^0 := 1$

Rentenformel (Allgemein)

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n$$
$$-q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^{n+1}$$
$$= 1 - q^{n+1}$$
$$\Rightarrow (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Die sog. Rentenformel lautet

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

3 Der binomische Lehrsatz

3.1 Die binomischen Formeln

$(a + b)^2 = (a + b) * (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 – ab – ba + b^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$

$(a + b) * (a - b) = a^2 – ab + ba – b^2 = a^2 – b^2$

<u>binomische Formeln:</u>
$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$

$(a + b) * (a - b) = a^2 – b^2$

Beispiele (Überschlagsrechnungen)
a) $51^2 = (50+1)^2 = 2500 + 100 + 1 = 2601$
b) $98^2\ (100-2)^2 = 10000 - 400 + 4 = 9604$
c) $65 * 75 = (70 - 5) * (70 + 5) = 4900 - 25 = 4875$

Beispiele (Vereinfachung von Termen)

$$a)\frac{x^2+6x+9}{x^2+3x}=\frac{(x+3)^2}{x(x+3)}=\frac{x+3}{x}$$

$$b)\frac{6x-3}{36x^2-36x+9}=\frac{3(2x-1)}{9(4x^2-4x+1)}=\frac{3(2x-1)}{9(2x-1)^2}=\frac{2}{3(2x-1)}=\frac{2}{6x-3}$$

$$c)\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}=x-1$$

Beispiel:
Jede ungerade ganze Zahl ist die Differenz zweier Quadratzahlen.
U sei eine Ungerade Zahl. Dann gibt es eine ganze Zahl k mit

$$u = 2k(\pm 1)$$
$$u = (2k-1)*1 = (k+k-1)*(k-(k-1)) = k^2-(k-1)^2$$

$$37 = 19^2-(19-1)^2 = 19^2-18^2$$
$$-51 = 2(-25)-1 = (-25)^2-(-25-1)^2 = 25^2-26^2$$

Beispiel (mehrere Summanden)

$$(4u-v+3w)^2 = ((4u-v)+3w)^2 = (4u-v)^2+2(4u-v)*3w+9w^2$$
$$=16u^2-8uv+v^2+24uw-6vw+9w^2$$

3.2 Verallgemeinerte binomische Formeln

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 * (a+b) = a^2 + 2ab + b^2 * (a+b)$$
$$= a^3 + 2a^2b + a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) * (a+b)$$
$$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b + 3ab^3 + b^4$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

PASCAL'sches Dreieck

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^5 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Die in dem PASCAL 'sehen Dreieck auftretenden Zahlen heißen Binomialkoeffizienten. Der Binomialkoeffizient in der n- ten Zeile an der k- ten Stelle wird mit $\binom{n}{k}$ bezeichnet.

n- te Zeile des PASCAL 'schen Dreiecks

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$$
$$\binom{n+1}{0}, \binom{n+2}{1}, \binom{n+3}{2}, \ldots, \binom{n+1}{n}, \binom{n+1}{n+1}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$\Rightarrow \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

<u>Definition:</u>

$$n! = \prod_{k=0}^{n} k = 1*2*3*4*...*n$$ heißt n Fakultät

Bsp.:

5! = 120
6! = 720
10! = 3.628.800
15! = 130.267.463.800

<u>Definition:</u> (Formel für n über k per Taschenrechner)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Bsp.:

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!-3!} = \frac{1*2*3*4*5*6*7}{(1*2*3*4)*(1*2*3)} = 35$$

$$\binom{49}{6} \approx 14.000.000$$

Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k$$

$$(a+b)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} * a^{8-k} * b^k = a^8 + \binom{8}{1} a^7 b + \binom{8}{2} a^6 b^2 + \binom{8}{3} a^5 b^3 + ... + \binom{8}{8} b^8$$

$$\Rightarrow a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

$$(a-b)^n = (a+(-b))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(-b)^k$$
$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a-b)^2 = \sum_{k=0}^{2} (-1)^k \binom{2}{k} a^{2-k} b^k = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^n - b^n = (a-b) * \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$
$$a^3 - b^3 = (a-b) * \sum_{k=0}^{2} a^{3-1-k} b^k = (a-b)*(a^2 + ab + b^2)$$

4. Potenzen & Logarithmen

4.1 Rechnen mit Quadratwurzeln

Definition:
Es sei a $\in \mathbb{R}$ und a $\geq$ 0, dann ist die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ von a die nicht negative Lösung der Gleichung $x^2 = a$
Die negative Lösung der Gleichung $x^2 = a$ ($a > 0$) wird mit $-\sqrt{a}$ bezeichnet.

Rechenregeln:

$$1) \sqrt{a*b} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$$
$$2) \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (für\, b \neq 0)$$
$$3) \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$
$$4) \sqrt{a^2} = a \quad (für\, a \geq 0)$$

Beispiele:

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \quad (\neq -3)$$
$$\sqrt{4+9} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \quad (\neq \sqrt{4} + \sqrt{9})$$

Beispiele (Vereinfachung von Wurzelausdrücken)

$$a) \frac{1}{3}\sqrt{90x} = \frac{1}{3}\sqrt{9*10*x} = \frac{1}{3}*3*\sqrt{10x} = \sqrt{10x}$$
$$b) \sqrt{c^2} = -c \quad (falls\, c < 0)$$
$$c) \frac{\sqrt{2a*3b}}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{2a*3b}{ab}} = \sqrt{\frac{6ab}{ab}} = \sqrt{6}$$

Beispiele (Herstellung eines rationalen Nenners)

$$a)\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{5}*\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}+\sqrt{2}*\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}*\sqrt{5}-\sqrt{5}*\sqrt{2}}{3-2}$$

$$=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{15}-\sqrt{10}$$

$$b)\frac{x}{x+\sqrt{x}}=\frac{x(x-\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}=\frac{x^2-x\sqrt{x}}{x^2-x}=\frac{x(x-\sqrt{x})}{x(x-1)}=\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}$$

Beispiel (Freier Fall)
Freier Fall aus der Ruhe heraus aus einer Höhe von 45 m.
Gesucht ist die Fallzeit

$$s=\frac{1}{2}g*t^2 \qquad g=10\frac{m}{s^2} \qquad t^2=\frac{2s}{g}$$

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}=\sqrt{\frac{2*45}{10}}s=\sqrt{9}s=3s$$

<u>4.2 n-te Wuseln</u>

$x^n = a$

Fall 1) n ist gerade => $a \geq 0$

Die Gleichung hat für $a \geq 0$ genau zwei Lösungen, nämlich

$$x=\sqrt[n]{a} \quad und \quad x=-\sqrt[n]{a}$$

a heißt der <u>Radikant</u>

Fall 2) n ist ungrade => $a \in \mathbb{R}$

Die Gleichung hat für $a \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung, die mit

$x=\sqrt[n]{a}$ bezeichnet wird.

Bsp.

$$\sqrt[3]{-8}=-2$$

Rechenregeln

$$1)\ \sqrt[n]{x*y}=\sqrt[n]{x}*\sqrt[n]{y}$$

$$2)\ \sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$3)\ \left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$$

$$4)\ \sqrt[n]{a^n}=a \quad (im\ Fall\ n\ gerade\ nur\ für\ a\geq 0)$$

Beispiele:

$$a)\frac{3}{1-\sqrt[3]{5}}=\frac{3(1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}^2)}{(1-\sqrt[3]{5})(1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}^2)} \qquad \left(\Rightarrow a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\right)$$

$$=\frac{3+3\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{5}^2}{1-5}=\frac{3+3\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{5}^2}{-4}$$

4.3 Potenzen mit reellen Exponenten

a^n mit $n \in \mathbb{N}_0$ ist bereits definiert

a^{-n} ? für $n \in \mathbb{N}$

$$1 = a^0 = a^{n+(-n)} = a^n * a^{-n} \Rightarrow a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

$$z.B. \quad 10^{-6} = \frac{1}{10^6} = 0{,}000001$$

Es sei $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}*n} = a^m$$

$$a^m = a^{\frac{m}{n}*n} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n \quad \Rightarrow \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$z.B. \quad 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25} \approx 2{,}924...$$

Bespiel: (Bakterienkultur)
Zum Zeitpunkt t = 0: 1000 Bakterien
Die Anzahl der Batterien zur Zeit t:

$N(t) = 1000 * 2^t$ ($t \in \mathbb{N}_0$ in Stunden)

Wie viele Bakterien befinden sich nach 1 Std. 40 Min. in der Lösung ?

Neuer Zeittakt σt = 20 min:

$$N(20\min) = 1000c$$
$$N(40\min) = 1000c^2$$
$$N(60\min) = 1000c^3$$
$$N(t) = 1000c^t$$

Aus dem Aufgabentext geht hervor:

$$1000c^3 = 1000 * 2^1 = c^3 * 2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt[3]{2}$$

$$N(1\ Std\ 40\min) = 1000c^5 = 1000\left(\sqrt[3]{2}\right)^5 = 1000 * 2^{\frac{5}{3}}$$

Damit ist bewiesen, dass der Wachstumsprozess dem natürlichen Wachstumsprozess entspricht. Man kann also t $\in \mathbb{R}$ einsetzen, um den Prozess zwischen den Werten für t $\in \mathbb{N}_0$ zu betrachten.

x sei $\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$x = x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n \qquad (x_0 \in \mathbb{Z}; x_1, x_2, ...(Ziffern\ 0-9))$$

1. Fall: x > 0

$$a^{x_0 x_1 ... x_n} < a^x < a^{x_0 x_1 ... x_n + 10^{-n}}$$

Beispiel:

$$2^{\sqrt{2}} = ?$$
$$x = \sqrt{2} \approx 1,414...$$
$$2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2 \qquad \Rightarrow \quad 2 < 2^{\sqrt{2}} < 4$$
$$2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} \qquad \Rightarrow \quad 2,639 < 2^{\sqrt{2}} < 2,828$$
$$2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42} \qquad \Rightarrow \quad 2,657 < 2^{\sqrt{2}} < 2,676$$

4.4 Logarithmen

Für jedes a $\in \mathbb{R}$, a > 0 und a ≠ 1 sowie b > 0 hat die Gleichung $a^x = b$ genau eine Lösung.

x $= \log_a b$ (Logarithmus von b zur Basis a)

$$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$$

Beispiele

lg(100.000) = 5, denn 10^5 = 100.000 $\qquad$ ($\log_{10}$ = lg)

$\log_2(1024)$ = 10 ⇔ 2^x = 1024

$$\log_5\left(\frac{1}{3125}\right) \Rightarrow 5^x = \frac{1}{3125} = -5$$

$$a^{\log_a b} = b \qquad und \qquad \log_a a^x = x$$

Logarithmengesetze

$$1)\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$
$$2)\log_a (x * y) = \log_a x + \log_a y$$
$$3)\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$
$$4)\log_a x^n = n * \log_a x$$

Bezeichnungen

(1) $\log_{10} x = \lg x$ (dekadischer Logarithmus)

(2) $\ln x = \log_e x$ (natürlicher Logarithmus)

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\approx 2{,}71828...$$ (eulersche Zahl e)

Umrechnungsformeln:

$$a^x = e^{x*\ln(a)}$$
$$\log_a(a)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Beweis

1) $$a^x=\left(e^{\ln(a)}\right)^x=e^{x*\ln(a)}$$

2) $$\log_a(x)=x=e^{\ln(x)}\Rightarrow\left(e^{\ln(a)}\right)^{\log_a(x)}=e^{\ln(x)}=e^{\ln(a)*\log_a(x)}$$
$$=e^{\ln(x)}$$

$$\ln(a)*\log_a(x)=\ln(x)$$
$$\Rightarrow\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Beispiel 4.4.5

$$\frac{q}{p}=\frac{1}{2}$$ nach einer Halbwertszeit t = T

$$\frac{q}{p}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$ wenn t = T

$$\frac{q}{p}=\frac{1}{8}$$ wenn (t = 3)

$$\frac{q}{p}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$ (t = xT)

gemessen:

$$\frac{q}{p}=0{,}375\quad\Rightarrow\quad\log_{0,5}(0{,}375)=\frac{\ln(0{,}375)}{\ln(0{,}5)}=1{,}415$$
$$1{,}415*T=8108{,}165\ Jahre$$

Beispiel: Aufsuchen funktionaler Zusammenhänge:

Für die Funktion $y=\sqrt{x}$ lassen sich folgende Zusammenhänge finden:

$$\lg(y)=\lg\left(\sqrt{x}\right) \triangleq \lg(y)=\lg\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \triangleq \lg(y)=\frac{1}{2}\lg(x)$$

5. Gleichungen

5.1 lineare & quadratische Gleichungen

Eine lineare Gleichung ax + b = 0 (a ≠ 0)
hat genau eine Lösung, nämlich $x=-\frac{b}{a}$

quadratische Gleichungen

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a \neq 0)$$

Bsp. $7x^2-4x+2=0$

Normalform einer quadratischen Gleichung

$$x^2+px+q \quad \left(p=\frac{b}{a};q=\frac{c}{a}\right)$$

quadratische Ergänzung:

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q=\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Diskriminante:

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

1) $\quad$ $\textit{für } D>0$

$$\Rightarrow x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Beispiel:

$$x^2-6x+5=0$$
$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{6}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{6}{2}\right)^2-5}$$
$$\Rightarrow x_{1,2}=3\pm\sqrt{4}=3\pm 2$$
$$\Rightarrow x_1=5 \quad x_2=1$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

2)

$$\text{für } D=0$$
$$\Rightarrow x=-\frac{p}{2}$$

Beispiel:

$$x^2+26x+169=0$$
$$\Rightarrow x_{1,2}=-13\sqrt{(13)^2-169}=-13$$

3)

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$
$$\text{für } D<0$$

$x^2+px+q=0$ hat keine reelle Lösung

Beispiel:

$$x^2+x+1=0$$
$$\Rightarrow x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)-1}\notin\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow L=\emptyset$$

Bespiel 1.5.1

$$\frac{54*22,5}{2}=\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow (54-2x)(22,5-2x)=\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-108x-45x+1215=607,5$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-153x+607,5=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-\frac{153}{4}x+\frac{607,5}{4}=0$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=-\left(\frac{-\frac{153}{4}}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{-\frac{153}{4}}{2}\right)^2-\left(-\frac{6025}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=19,125\pm\sqrt{\frac{153}{4}+151.875}$$

$$\Rightarrow x_1=19,125\pm\sqrt{190,125}\qquad x_2=19,125-\sqrt{190,125}$$

Der abgetrennte Streifen ist 4,5 m breit.

5.2 Gleichungen, de sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen

Wurzelgleichungen

Beispiel 5.2.1

Lösung mit Hilfe des Satzes von Pythagoras

$$\sqrt{4^2+x^2}+\sqrt{(15-x)^2+5^2}=18\ LE$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(15-x)^2+25}=18-\sqrt{16+x^2}$$

$$\Leftrightarrow 225-30x+x^2+25=340-36\sqrt{16+x^2}+x^2$$

$$\Leftrightarrow 36\sqrt{16+x^2}=90+30x$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{16+x^2}=15+5x$$

$$\Leftrightarrow 36\left(16+x^2\right)=225+150x+25x^2$$

$$\Leftrightarrow 36x^2+576=25x^2+150x+225$$

$$\Leftrightarrow 11x^2-150x+351=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-\frac{150}{11}x+\frac{351}{11}=0$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{75}{11}\pm\sqrt{\left(\frac{75}{11}\right)^2-\frac{351}{11}}$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{75}{11}\pm\frac{42}{11}$$

$$\Rightarrow x_1=3 \quad x_2=\frac{117}{11}$$

Beispiel:

$$\sqrt{2x-3}+5-3x=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-3}=3x-5$$

$$\Leftrightarrow 2x-3=9x^2-30x+25$$

$$\Leftrightarrow 9x^2-32x+28=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-\frac{32}{9}x+\frac{28}{9}=0$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{16}{9}\pm\sqrt{\frac{256}{81}-\frac{28}{9}}=\frac{16}{9}\pm\sqrt{\frac{4}{81}}$$

$$\Rightarrow x_1=2 \quad x_2=\frac{14}{9}$$

Probe:
Zur Probe wird x_2 in die ursprüngliche Gleichung eingesetzt.

$$\sqrt{2*\frac{14}{9}-3}+5*3*\frac{14}{9}=\sqrt{\frac{1}{9}}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

=> Wurzelgleichungen muss immer die PROBE gemacht werden, um Lösungen aus auszuschließen, die erst während der Rechnung dazukommen.
Lösung:

$x_1=2$ ist die einzige Lösung der Gleichung

$$\sqrt{2x-3}+5-3x=0$$

Bruchgleichungen:

Beispiel:

$$\frac{2x+1}{x-3}+\frac{3x-5}{x+3}=\frac{2x^2+2x+18}{x^2-9}$$

$$\Leftrightarrow 2x+1\left(x+3\right)+3x-5\left(x-3\right)=2x^2+2x+18$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+x+6x+3+3x^2-5x-9x+15=2x^2+2x+18$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-7x+18=2x^2+2x+18$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-9x=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x-3\right)=0$$

$$\Rightarrow x_1=0 \quad x_2=3$$

Probe für $x_2 = 3$ ergibt keine Lösung.

=> Bei Bruchgleichungen muss auch <u>immer</u> die PROBE durchgeführt werden.
=> Abgleich der Lösungsmenge mit dem Definitionsbereich der Bruchgleichung führt zum Ausschluss von best. Lösungen.
=> x = 0 ist die einzige Lösung der Bruchgleichung.

Substitution:

Beispiel:

$$10^x+10^{-x}=\frac{101}{10}$$

$$\Leftrightarrow 10^x+\frac{1}{10^x}=\frac{101}{10}$$

$$\Leftrightarrow \left(10^x\right)^2+1=\frac{101}{10}*10^x$$

$$\xrightarrow{z=10^x} z^2+1=\frac{101}{10}z$$

$$\Leftrightarrow z^2-\frac{101}{10}z+1=0$$

$$\Rightarrow z_{1,2}=-\left(\frac{-\frac{101}{10}}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{101}{20}\right)-1}$$

$$\Rightarrow z_{1,2}=\frac{101}{20}\pm\sqrt{\frac{81}{20}}$$

$$\Rightarrow z_1=7,0625 \quad z_2=3,0375$$

$$\Rightarrow x_1=\lg\left(z_1\right) \quad x_2=\lg\left(z_2\right)$$

$$\Rightarrow x_1=0,8490 \quad x_2=0,4825$$

5.3 Gleichungen dritten und höheren Grades

Eine algebraische Gleichung n- ten Grades hat die Form:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$
$$mit\ a_n \neq 0$$

Satz:
Eine algebraische Gleichung n- ten Grades hat höchstens n Lösungen.
Wenn n ungerade ist, hat de Gleichung $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ wenigstens eine Lösung.

Satz:
Wenn eine algebraische Gleichung mit ausschließlich ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ eine ganzzahlige Lösung x_0 besitzt, dann teilt x_0 das absolute Glied a_0.

$$a_0 = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - ... - a_2 x^2 - a_1 x$$
$$= -(a_n x^{n-1} - a_{n-1}x^{n-2} - ... - a_2 x - a_1) * x_0$$
$$(a_n x^{n-1} - a_{n-1}x^{n-2} - ... - a_2 x - a_1) \in \mathbb{Z}$$

Beispiel:
Gesucht ist eine Lösung der Gleichung

$$x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 7x - 14 = 0$$

Es gibt eine Lösung $x_0 \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow x_0 \in \{a \in \mathbb{Z} \mid a\ teilt\ 14\} = \{1, 2, 7, 14, -1, -2, -7, -14\}$$

Durch Probieren erhält man

$$x_0 = 2$$

Aufspalten des Faktors (x-2) durch Polynomdivision

$$\left(x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 7x - 14\right) : (x - 2) = x^4 + 8x + 7$$
$$\begin{array}{l} \underline{x^5 - 2x^4} \\ \qquad 0 \quad +8x^3 - 16x^2 \\ \qquad\quad \underline{+8x^3 - 16x^2} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \quad +7x - 14 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{+7x - 14} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

$$x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 7x - 14 = \left(x^4 + 8x^2 + 7\right) : (x - 2) = 0$$

Für von $x_0 = 2$ verschiedene Lösungen muss $x^4 + 8x^2 + 7 = 0$ sein.

$$x^4 + 8x^2 + 7 = 0 \text{ (biquadratische Gleichung)}$$
$$z^2 + 8z + 7 = 0$$
$$\Rightarrow z_{1,2} = -4 \pm \sqrt{9}$$
$$\Rightarrow z_1 = -1 \quad z_2 = -7$$

=> x^2 muss positiv sein, somit gibt es keine weiteren Lösungen!
Für $x_0 = 2$ ist de einzige Lösung der Gleichung

$$x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 7x - 14 = 0$$

Beispiel: (Horner Schema)

$$x^5 - 3x^4 - x + 3 = 0$$

1 * 3*3*3*3*3 – 3*3*3*3*3 – 0*3*3*3 + 0*3*3 – 1*3 + 3 = 0
15 Multiplikationen und 5 Additionen

(1*3*3*3*3 – 3*3*3*3 + 0*3*3 + 0*3 – 1)*3 + 3 = 0

(((1*3*3*3 – 3*3*3 + 0*3 + 0)*3)-1)*3 + 3 = 0

(((1*3*3 – 3*3 + 0)+0*3)-1*3) + 3 = 0

((((1*3 – 3)*3 + 0)*3 + 0)*3 – 1)*3 + 3 = 0

Horner Schema

In der oberen Zeile des Horner Schemas werden die Koeffizienten der Reihe nach eingetragen. Sollte ein x^n mit $n \in \mathbb{N}$ nicht vorkommen, wird an diese Stelle eine 0 geschrieben. Danach schreibt man den Wert des ersten Koeffizienten in die untere Zeile. Man multipliziert diesen Wert dann mit x_0 und schreibt den errechneten Wert in die zweite Zeile unter den zweiten Koeffizienten. Daraufhin addiert man die nun untereinander stehenden Werte und schreibt das Ergebnis in die untere Zeile. Nun multipliziert man wieder die untere Zeile mit x_0 usw. Erhält man am Ende eine 0 in der unteren Zeile, so ist x_0 eine Lösung der eingesetzten Gleichung.

Beispiele für das Horner Schema für $x^5 - 3x^4 - x + 3 = 0$

	1	-3	0	0	-1	3
x_0=3		3	0	0	0	-3
	1	0	0	0	-1	0

Bespiel: $(x_0 = 7)$

	1	-3	0	0	-1	3
x_0=7		7	28	196	1372	9597
	1	4	28	196	1371	9600

Wenn man am Ende null erhält, kann man die Gleichung auch um einen Grad verringert ausdrücken:

$$x^5 - 3x^4 - x + 3 = \left(x^4 - 1\right) * \left(x - 3\right)$$