6. Geonometrie & Trigonometrie

6.1 Die Stahlensätze & die Satzgruppe des Pythagoras

Flächeninhalt eines Rechtecks A = a * b (a, b sind die kanten des Rechtecks)

Flächeninhalt eines Parallelogramms A = g * h

Flächeninhalt eines Dreiecks $A = \frac{1}{2} * g * h$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist $A = \frac{1}{2} * g * h$ unabhängig von der Wahl des Paares Grundseite und zugehörige Höhe.

1. Strahlensatz $a = l\left(\overline{SA}\right) \qquad b = l\left(\overline{SB}\right)$ $a' = l\left(\overline{SA'}\right) \qquad b' = l\left(\overline{SB'}\right)$ Dann gilt $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$

Beweis:

Fläche des Dreiecks $\triangle AA'B$ ist $F(AA'B) = \frac{gh}{2} = \frac{l(\overline{AA'}) * h_1}{2}$

Fläche des Dreiecks $\triangle ABB'$ ist $F(ABB') = \frac{gh}{2} = \frac{l(\overline{BB'}) * h_2}{2}$

$$\Rightarrow l\left(\overline{AA'}\right) * h_1 = l\left(\overline{BB'}\right) * h_2$$

Fläche des Dreiecks $\triangle ABS$ ist

$$F(ABS) = \frac{a * h_1}{2} = \frac{b * h_2}{2}$$

$$\Rightarrow a * h_1 = b * h_2$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{a + l\left(\overline{AA'}\right)}{a} = 1 + \frac{l\left(\overline{AA'}\right)}{a} = 1 + \frac{h_2}{h_1} * \frac{l\left(\overline{BB'}\right)}{a} = 1 + \frac{h_2 * l\left(\overline{BB'}\right)}{h_1 * b}$$

$$= 1 + \frac{l\left(\overline{BB'}\right)}{b} = \frac{b + l\left(\overline{BB'}\right)}{b} = \frac{b'}{b}$$

2. Strahlensatz

$$c = l\left(\overline{AB}\right) \qquad c' = l\left(\overline{A'B'}\right)$$

$$a = l\left(\overline{SA}\right) \qquad a' = l\left(\overline{SA'}\right)$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}$$

Beweis:
Nach dem ersten Strahlensatz gilt:

$$\frac{l\left(\overline{A'S}\right)}{l\left(\overline{A'A}\right)} = \frac{l\left(\overline{A'B'}\right)}{l\left(\overline{A'C}\right)} \Rightarrow \frac{l\left(\overline{A'A}\right)}{l\left(\overline{A'S}\right)} = \frac{l\left(\overline{A'C}\right)}{l\left(\overline{A'B'}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{l\left(\overline{SA'}\right) - l\left(\overline{SA}\right)}{l\left(\overline{SA'}\right)} = \frac{l\left(\overline{A'B'}\right) - l\left(\overline{C'B'}\right)}{l\left(\overline{A'B'}\right)}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{a}{a'} = 1 - \frac{c}{c'}$$

$$\Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}$$

Satz:
Werden zwei Geraden g und h von einer dritten Geraden l geschnitten,
sind g und h genau dann parallel, wenn die Stufenwinkel γ und δ gleich sind.

$$g \parallel h \;\; wenn \;\; \gamma = \delta$$

Satz: (Winkelsumme im Dreieck)

Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Folgerung:
Stimmen 2 Dreiecke in zwei ihrer Innenwinkel überein, so stimmen sie auch in ihren dritten Innenwinkel überein.

Definition Zwei Dreiecke heißen ähnlich, wenn sie in zwei und damit in allen dreien Winkeln übereinstimmen.

Satz:
Sind die Dreiecke $\triangle$ ABC und das Dreieck $\triangle$ A'B'C' ähnlich, so gilt mit den üblichen Bezeichnungen

$$\frac{a'}{a} = \frac{a'}{b'} \quad ; \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \quad ; \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

Beweis:
Aus dem zweiten Strahlensatz folgt:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \quad usw.$$

Kathetensatz In einen rechtwinkeligen Dreieck ist $b^2 = c * q \quad ; \quad a^2 = c * p$

Beweis:

$$\sphericalangle BCA = \sphericalangle ADC = 90°$$
$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CAD = \alpha$$

⇨ Die Dreiecke $\triangle$ ABC und $\triangle$ ADC sind ähnlich. ($\triangle$ ABC ~ $\triangle$ ADC)

$$\Rightarrow \frac{q}{b} = \frac{b}{c}$$
$$\Rightarrow b^2 = q * c$$

Höhensatz In einem rechtwinkeligen Dreieck gilt $h^2 = p * q$

Beweis:

$$\triangle ADC \sim \triangle BDC, \quad denn \sphericalangle ADC = \sphericalangle CDB = 90°$$
$$denn \sphericalangle CAD = \sphericalangle BCD = \alpha$$
$$\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle BDC$$
$$\Rightarrow \frac{h}{q} = \frac{p}{h} \Rightarrow h^2 = p * q$$

Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich den Hypotenusenquadrat: $a^2 + b^2 = c^2$

Beweis:

$$a^2 + b^2 = qc + pc = (q + p)c = c^2$$

Beispiel:

$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{7,5^2 + 0,6^2}}{0,6} = \frac{F_1}{\frac{1}{2}G}$$

$$G = m * g = 2,446 * 10N$$

$$F_1 = \frac{\sqrt{7,5^2 + 0,6^2}}{0,6} * \frac{1}{2}G = \frac{\sqrt{7,5^2 + 0,6^2}}{0,6} * \frac{1}{2}(2,446 * 10N)$$

$$= 12,34 * 12,33 = 150,48$$

<u>6.2 Koordinaten</u>

Abzisse = x-Achse
Ordinate = y-Achse

Ein Punkt P hat die Koordinaten P(x/y)

Abstand zweier Punkte

$$d = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Bsp.

$$P = (3/-1) \quad und \quad Q = (-2/2)$$

$$d(P,Q) = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Punkt-Anstiegsform einer Geraden

$$\frac{y-b}{m} = \frac{x}{1}$$

$$\Rightarrow y = mx + b$$

Ein Punkt P=(x_0/y_0) liegt genau dann auf der Geraden g, wenn die Gleichung

y = mx + b erfüllt ist.

Allgemeine Form einer Geradengleichung

ax + by = c (mit (a, b) ≠ (0,0))

Achsenabschnittsform $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$

Wenn x oder y = 0 ist,
dann gilt

x = p oder y = q

Beispiel:
Bestimme die Punkt Anstiegsform des Lotes vom Punkt P (x/y) auf die Gerade

g: y = mx + b

Nach dem Höhensatz gilt

$$h^2 = m*(-n)$$
$$1 = -m*n$$
$$n = -\frac{1}{m}$$

$$h: y = -\frac{1}{m}x + c$$
$$y_0 = -\frac{1}{m}x_0 + c$$
$$c = y_0 + \frac{1}{m}x_0$$

$$h: y = -\frac{1}{m}x + y_0 + \frac{1}{m}x_0 - \frac{1}{m}$$
$$\Rightarrow y = -\frac{1}{m}\left(x - x_0\right) + y_0$$

6.3 Der Kreis

Ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r ist de Menge aller Punkt, die von M den Abstand r haben.

Umfang des Kreises

$$U = \pi d = 2r\pi$$

Flächeninhalt:

$$A = \pi r^2$$

Bogenlänge:

$$b = \frac{\pi * d * \omega}{360°} = \frac{\pi * r * \omega}{180°}$$

Sektorfläche:

$$S = \frac{A * \omega}{360°} = \frac{\pi * r^2 * \omega}{360°} = \frac{\pi * r * \omega}{180} * \frac{r}{2} = \frac{b * r}{2}$$

Kreisgleichung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Beispiel
Welchen Mittelpunkt und welchen Radius hat der Kreis mit der Gleichung:

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y = 11$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 21$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 21$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{21}\, ; M = (1/-3)$$

6.4 Trigonometrie

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c} \quad ; \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \quad ; \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

Sinus von α

$$\sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete(\alpha)}{Hypotenuse} = \frac{a}{c}$$

Kosinus von α

$$\cos(\alpha) = \frac{Ankathete(\alpha)}{Hypotenuse} = \frac{b}{c}$$

Tangens von α

$$\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete(\alpha)}{Ankathete(\alpha)} = \frac{a}{b}$$

Zusammenhänge:

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \sin(\beta) = \sin(90° - \alpha)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Das Bogenmaß

Gradmaß

$$rechter\ Winkel \triangleq 90°$$

Bogenmaß

$$rechter\ Winkel \triangleq \frac{\pi}{2}$$

Umrechnungsformeln
Grad → Radiant

$$b = \frac{\pi}{180°} * \alpha$$

Radiant → Grad

$$\alpha = \frac{180°}{\pi} * b$$

Grad	0	30	45	60	90	180	360
Radiant	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
sin(α)	0	0,5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5	0	-1	1
tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	---	0	0

7 Lineare Gleichungssysteme

7.1 Lineare Gleichungssysteme mit zwei oder drei Unbekannten

Lösung eines LGS per Determinante:

Lösung für x:

$$\begin{aligned}-2x+7y&=3\\5x-11y&=4\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}ax+by&=e\,|*d\\cx+dy&=f\,|*b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\quad adx+bdy=de\\\Rightarrow&\quad -(bcx+bdy=bf)\\=&\quad (ad-bc)x=de-bf\end{aligned}$$

(falls ad – bc ≠ 0, gilt $x=\frac{de-bf}{ad-bc}$)

Lösung für y:

$$\begin{aligned}ax+by&=e\,|*c\\cx+dy&=f\,|*a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\quad acx+bcy=ce\\\Rightarrow&\quad -(acx+ady=af)\\=&\quad (bc-ad)y=ce-af\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y=\frac{af-ce}{ad-bc}$$

(für bc – ad ≠ 0, siehe x)

Determinante:

$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$ heißt die Determinante des LGS

Cramer'sche Regel für LGS mit 2 Unbekannten:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}e & b\\ f & d\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a & e\\ c & f\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}$$

Beispiel

(1)

$$\begin{aligned} -2x+7x&=3 \\ 5x-11y&=4 \end{aligned}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 11 \end{vmatrix}}=\frac{-33-28}{22-35}=\frac{-61}{-13}=\frac{61}{13}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 11 \end{vmatrix}}=\frac{-8-15}{22-35}=\frac{-23}{-13}=\frac{23}{13}$$

(2)

$$\begin{aligned} 4x-y&=5 \\ 3x+2y&=1 \end{aligned}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{10+1}{8-(-3)}=\frac{11}{11}=1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{4-15}{8-(-3)}=\frac{-11}{11}=-1$$

3 Unbekannte im LGS

Beispiel

$$\begin{aligned} 7x-y+4z&=3 \\ x+5y-2z&=6 \\ -4x+3y-z&=-1 \end{aligned}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}3&-1&4\\6&5&-2\\-1&3&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}7&-1&4\\1&5&-2\\-4&3&-1\end{vmatrix}}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}7&3&4\\1&6&-2\\-4&-1&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}7&-1&4\\1&5&-2\\-4&3&-1\end{vmatrix}}\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}7&-1&3\\1&5&6\\-4&3&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}7&-1&4\\1&5&-2\\-4&3&-1\end{vmatrix}}$$

Sarrus'sche Regel für Determinanten

$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$$

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=aei+bfg+cdh-ceg-afh-bdi$$

Dabei wird immer die Diagonale der Determinante betrachtet. Diese Diagonalen werden addiert, im Folgenden werden die Gegendiagonalen subtrahiert. Bei einer 3x3 Zeichen großen Determinante kann es hilfreich sein, die beiden letzten Spalten hinter der Determinante nochmals aufzuschreiben, da so ein Ablesen der Diagonalen erleichtert wird.

Beispiel (Fortsetzung):

$$x=\frac{\begin{vmatrix}3&-1&4\\6&5&-2\\-1&3&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}7&-1&4\\1&5&-2\\-4&3&-1\end{vmatrix}}=\frac{-15-2+72+20+18-6}{-35-8+12+80+42-1}=\frac{87}{90}=\frac{29}{30}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3&-1&4\\6&5&-2\\-1&3&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}7&-1&4\\1&5&-2\\-4&3&-1\end{vmatrix}}=\frac{-42+24-4+96-14+3}{-35-8+12+80+42-1}=\frac{63}{90}=\frac{7}{10}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}3&-1&4\\6&5&-2\\-1&3&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}7&-1&4\\1&5&-2\\-4&3&-1\end{vmatrix}}=\frac{-35+24+9+60-126-1}{-35-8+12+80+42-1}=\frac{-69}{90}=\frac{-23}{30}$$

7.2 Der Gauß 'sche Algorithmus

$$\begin{aligned}2w+4x-3y-2z&=-6\\8w-4x-y+3z&=15\\-3w+7x+2y-3z&=8\\w-4x+3y+2z&=12\end{aligned}$$

Lösungserhaltende Umformungen
(elementare Zeilenumformungen)

- Vertauschen zweier Gleichungen
- Multiplizieren einer Gleichung mit einer Zahl ≠ 0
- Addition eines Vielfachen der einen Gleichung zu einer anderen Gleichung

$$\left.\begin{array}{cccc|c}2&4&-3&-2&-6\\8&-4&-1&3&15\\-3&7&2&-2&8\\1&-4&3&2&12\end{array}\right.$$

(Vertauschen der 1. und 4. Gleichung bringt eine 1 an die 1. Stelle)

$$\left.\begin{array}{cccc|c}1&-4&3&2&12\\8&-4&-1&3&15\\-3&7&2&-2&8\\2&4&-3&-2&-6\end{array}\right.$$

(2. – (8 * 1.))

$$\left.\begin{array}{cccc|c}1&-4&3&2&12\\0&28&-25&-13&-81\\-3&7&2&-2&8\\2&4&-3&-2&-6\end{array}\right.$$

(3. + (3 * 1.))

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 28 & -25 & -13 & -81 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 44 \\ 2 & 4 & -3 & -2 & -6 \end{array}\right.$$

(4. – (2 * 1.))

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 28 & -25 & -13 & -81 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 44 \\ 0 & 12 & -9 & -6 & -30 \end{array}\right.$$

(Tauschen der 2. und 4. Gleichung)

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 12 & -9 & -6 & -30 \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 44 \\ 0 & 28 & -25 & -13 & -81 \end{array}\right.$$

$\left(\frac{2.}{12}\right)$ bringt 1 an die zweite Stelle

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -5 & 11 & 3 & 44 \\ 0 & 28 & -25 & -13 & -81 \end{array}\right.$$

(3. + (5 * 2.))

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{29}{4} & \frac{1}{2} & \frac{63}{2} \\ 0 & 28 & -25 & -13 & -81 \end{array}\right.$$

(4. – (28 * 1.))

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{29}{4} & \frac{1}{2} & \frac{63}{2} \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -11 \end{array}\right.$$

(Tauschen der 3. und 4. Gleichung)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{29}{4} & \frac{1}{2} & \frac{63}{2} \end{array}\right) \qquad 3.*\left(-\frac{1}{4}\right) \text{ bringt 1 an dritte Stelle}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & \frac{29}{4} & \frac{1}{2} & \frac{63}{2} \end{array}\right) \qquad \left(4.-\frac{29}{4}*3.\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{37}{16} & \frac{185}{16} \end{array}\right) \qquad 4.*\left(\frac{16}{37}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow z=5$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} w-4x+3y+2z&=12 \\ x-\frac{3}{4}y-\frac{1}{2}z&=-\frac{5}{2} \\ y-\frac{1}{4}z&=\frac{11}{4} \\ z&=5 \end{aligned}$$

Durch einsetzen und umstellen des Systems erhält man die restlichen Werte:

$y=\frac{11}{4}+\frac{1}{4}*5=\frac{16}{4}=4 \qquad x=\frac{3}{4}*4+\frac{1}{2}*5-\frac{5}{2}=3+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}=3 \qquad w=4*3-3*4-2*5+12=2$

7.3 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Beispiel 7.3.1

Kreuzung A: $300 + x_4 = 280 + x_1$
Kreuzung D: $600 + x_1 = 410 + x_2$
Kreuzung C: $250 + x_2 = 350 + x_3$
Kreuzung D: $200 + x_3 = 310 + x_4$

Aus diesen Informationen lässt sich ein LGS entwickeln:

$$x_1 - x_4 = 20$$
$$x_1 - x_2 = -190$$
$$x_2 - x_3 = 100$$
$$x_3 - x_4 = 110$$

Aus dem Gauß'schen Algorithmus folgt:

$$x_1 - x_4 = 20$$
$$x_2 - x_4 = 210$$
$$x_3 - x_4 = 110$$
$$0 = 0$$

Daraus kann man folgern, dass es unendlich viele Lösungen dieses LGS gibt, und man Lösungen nur in Abhängigkeit einer Variablen angeben kann. Man setzt in diesem Fall für eine Variable einen freien Parameter ein und gibt die restlichen Lösungen in Abhängigkeit des Parameters an.

$$x_1 = 20 + t$$
$$x_2 = 210 + t$$
$$x_3 = 110 + t$$
$$x_4 = t$$

x_4 = t heißt freier Parameter

b)

$$x_2 = 2x_4 = 2t$$
$$210 + t = 2t \quad \Rightarrow \quad t = 210$$

$$x_1 = 20 + 210 = 230$$
$$x_2 = 210 + 210 = 420$$
$$x_3 = 110 + 210 = 320$$
$$x_4 = 210$$

c)

$$x_4 = 0 = t$$

$$x_1 = 20$$
$$x_2 = 210$$
$$x_3 = 110$$

Ein aus m Gleichungen mit n unbekannten bestehendes System

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & \dots & a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & \cdots & a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$ heißt lineares Gleichungssystem (LGS)

Die Zahlen a_{ij} mit $\left(i \in \{1,...,m\}; j \in \{1,...,n\}\right)$ heißen Koeffizienten

$b_1,\dots,b_m$ heißt die rechte Seite des LGS

Ein LGS heißt homogen, falls $b_1=\dots=b_m = 0$, sonst heißt das LGS inhomogen.

Lösungen eines LGS:

Das LGS
$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$
hat genau 1 Lösung.

Das LGS
$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$
hat unendlich viele Lösungen.

Das LGS
$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$
hat keine Lösung.

Zusammenfassung:
Ein LGS hat entweder eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen. Für ein homogenes LGS gilt, es gibt stets mindestens eine Lösung.

8 Ungleichungen & Beträge

8.1 Das Rechnen mit Ungleichungen

Für zwei reelle Zahlen a und b gilt genau eine
der Folgen den Beziehungen:

$a < b$	(lies: „a kleiner b”)
$a = b$	
$a > b$	(lies: „a größer b“)

Außerdem sei

$a \leq b$ ($a < b$ oder $a = b$)
$a \geq b$ ($a > b$ oder $a = b$)

Rechenregeln:

1) Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$ (Transitivität)

2) Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$

3) Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $ac < bc$

4) Aus $a < b$ und $c < d$ folgt $a + c < b + d$
(Ungleichungen dürfen addiert werden)

5) Aus $a < b$ und $c < 0$ folgt $ac > bc$

6) Aus $0 < a < b$ folgt $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

7) Für $0 \leq a < b$ gilt $a^2 < b^2$

Beispiel:
Behauptung: Quadrate sind niemals negativ!

$$a^2 > 0 \quad \textit{für} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Beweis:
1. Fall:

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad a * a > 0 * a \quad \Rightarrow \quad a^2 > 0$$

2.Fall:

$$a < 0 \quad \Rightarrow \quad a * a > 0 * a \quad \Rightarrow \quad a^2 > 0$$

Arithmetisches Mittel

$\frac{a+b}{2}$ ist das arithmetische Mittel der Zahlen a und b.

Geometrisches Mittel

$\sqrt{ab}$ ist das geometrische Mittel der Zahlen a und b.

Es gilt $a \le \sqrt{ab} \le b$

Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel

Für alle a, b $\in \mathbb{R}$ mit a ≥ 0 und b ≥ 0 gilt

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

Wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn a = b ist.

Beweis
Für a ≠ b gilt

$$0 < \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2$$

$$\Rightarrow 0 < a - 2\sqrt{ab} + b$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{ab} < a + b$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$$

Für a = b gilt

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a^2} = a$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a+a}{2} = a$$

$$\Rightarrow \sqrt{aa} = \frac{a+a}{2} \Rightarrow \sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$$

Kladde:

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \le a+b \Leftrightarrow 4ab \le (a+b)^2$$
$$\Leftrightarrow 4ab \le a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow 0 \le a^2 - 2ab + b^2$$
$$\Leftrightarrow 0 \le (a-b)^2$$

Welches Rechteck hat bei gegebenem Umfang U den größten Flächeninhalt ?

$$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow ab \le \frac{\left(\frac{U}{2}\right)^2}{4}$$
$$\Rightarrow ab \le \frac{U^2}{16}$$

(Nur für a = b wird der Wert von $\frac{U^2}{16}$

Das Quadrat ist das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt bei gegebenem Umfang!

8.2 Ungleichungen mit einer Unbekannten

Beispiel

$$x^2 - 11x + 10 > 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 11x + \frac{121}{4} + 10 > \frac{121}{4}$$
$$\Rightarrow \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + 10 > \frac{121}{4}$$
$$\Rightarrow \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 > \frac{81}{4}$$

1. Fall

$$x - \frac{11}{2} \ge 0$$

$$x - \frac{11}{2} > \frac{9}{2} \Rightarrow x > \frac{20}{2} \Rightarrow x > 10$$

2. Fall:

$$x-\frac{11}{2}<0$$

$$-\left(x-\frac{11}{2}\right)<-\frac{9}{2}\Rightarrow -x+\frac{11}{2}<-\frac{9}{2}\Rightarrow x>10$$

3. Fall:

$$x-\frac{11}{2}<\frac{9}{2}\Rightarrow x<1$$

$$\Rightarrow L=\{x\in\mathbb{R} \mid x<1\}\cup\{x\in\mathbb{R} \mid x>10\}$$

Intervallschreibweise:

1) [a, b] = $\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$ (abgeschlossenes Interwall)

2) [a, b[= $\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x<b\}$ (rechts- halboffenes Intervall)

3)]a, b] = $\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\le b\}$ (links- halboffenes Intervall)

4)]a, b[= $\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$ (offenes Intervall)

Insbesondere

]-∞, b] = $\{x\in\mathbb{R} \mid x\le b\}$

]a, ∞[= $\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\}$

]-∞, ∞[= $\mathbb{R}$

Beispiel:

Gesucht sind alle reellen Zahlen x, für die

$$\frac{2+x}{1+x}>1 \qquad \text{gilt.}$$

1.Fall

$$1+x>0$$

$$\Rightarrow 2+x>1+x\Rightarrow 2>1$$

$$\Rightarrow \frac{2+x}{1+x}>1 \quad \textit{für alle} \quad x>-1$$

2.Fall

$$1+x<0$$

$$\Rightarrow 2+x<1+x\Rightarrow 2<1$$

Lösung: $L =]-1, \infty[$

8.3 Beträge

Definition
Unter dem Betrag einer reellen Zahl versteht man die Zahl ohne ihr Vorzeichen, d.h.

$$|a| = \begin{matrix} a, \, falls \; a > 0 \\ -a, \, falls \; a < 0 \end{matrix}$$

z.B.

|-3| = 3 = - (-3)

|a| = - a (falls a < 0)

Rechenregeln:

1) |a * b| = |a| * |b|

2) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

3) |a+b| = |a| + |b| (Dreiecksgleichung)

Es gilt:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

8.4 Elementare Fehlerrechnung

Bricht man einen Dezimalbruch einer reellen Zahl $\bar{x}$ ab, so erhält man im Allgemeinen einen Näherungswert x von $\bar{x}$.

Die Differenz aus $\bar{x}$ und x heißt der absolute Fehler.

$$\Delta x = \bar{x} - x \quad \text{(absoluter Fehler)}$$

Beispiel:

$$\pi = 3{,}141592653...$$
$$Näherungswert \; \pi = 3{,}141592$$
$$|\pi - 3{,}141592| < 10^{-6}$$
$$Ebenfalls$$
$$|\pi - 3{,}141593| < 10^{-6}$$

Um eine reelle Zahl $\bar{x}$ auf „n Dezimalen genau“ anzugeben, werden alle Stellen ab der (n+1) –ten Ziffer gestrichen und die n-te Ziffer genau dann um eins erhöht, wenn die (n+1)-te Stelle größer oder gleich fünf ist.

X_n sei der auf diese Weise bestimmte Näherungswert für $\bar{x}$.
Dann gilt:

$$\left|\bar{x} - x_n\right| < \frac{1}{2} * 10^{-n}$$

Man schreibt auch:

$$\bar{x} = x_n \pm \frac{1}{2} * 10^{-n}$$

Allgemein bei physikalischen Größen:

$$|\Delta x| < \varepsilon$$

$$\bar{x} = x \pm \varepsilon$$

Satz: (Fehlerfortpflanzung des ersten Fehlers)

1) $\left|\Delta(x \pm y)\right| \leq |\Delta x| + |\Delta y|$

2) $\left|\Delta(x * y)\right| \leq |\bar{x}| * |\Delta y| + |y| * |\Delta x|$

3) $\left|\Delta\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq \frac{|y| * |\Delta x| + |x| * |\Delta y|}{|y| - |\bar{y}|}$

Relativer Fehler:
Dieser bezieht den absoluten Fehler auf den exakten Wert.

$\frac{\Delta x}{\bar{x}}$ (relativer Fehler)

Satz: (Fehlerfortpflanzung bei relativen Fehlern)

1) $\frac{\Delta(x * y)}{\bar{x} * \bar{y}} = \frac{\Delta x}{\bar{x}} + \frac{\Delta y}{\bar{y}} - \frac{\Delta x * \Delta y}{\bar{x} * \bar{y}} \approx \frac{\Delta x}{\bar{x}} + \frac{\Delta y}{\bar{y}}$

2) $\frac{\Delta\left(\frac{x}{y}\right)}{\frac{\bar{x}}{\bar{y}}} = \frac{\Delta x}{\bar{x}} - \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta x * \Delta y}{\bar{x} * y} \approx \frac{\Delta x}{\bar{x}} - \frac{\Delta y}{y}$

Beweis zu 2):

$$\frac{\Delta\left(\frac{x}{y}\right)}{\frac{\bar{x}}{\bar{y}}}=\frac{\frac{\bar{x}}{\bar{y}}-\frac{x}{y}}{\frac{\bar{x}}{\bar{y}}}=\left(\frac{\bar{x}}{\bar{y}}-\frac{x}{y}\right)*\frac{\bar{x}}{\bar{y}}=\frac{\bar{x}*y-x*\bar{y}}{\bar{y}*y}*\frac{\bar{y}}{\bar{x}}=\frac{\bar{x}*y-x*\bar{y}}{\bar{x}*y}$$

$$=\frac{\bar{x}*y-x*y+x*y-x*\bar{y}}{\bar{x}*y}=\frac{y\left(x-\bar{x}\right)-x\left(y-\bar{y}\right)}{\bar{x}*y}=\frac{\Delta x*y-x*\Delta y}{\bar{x}*y}$$

$$=\frac{\Delta x}{\bar{x}}-\frac{x}{\bar{x}}*\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta x}{\bar{x}}-\frac{x-\bar{x}+\bar{x}}{\bar{x}}*\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta x}{\bar{x}}-\left(1-\frac{\Delta x}{\bar{x}}\right)*\frac{\Delta y}{y}$$

$$=\frac{\Delta x}{\bar{x}}-\frac{\Delta y}{y}+\frac{\Delta x}{\bar{x}}*\frac{\Delta y}{y}$$

Beispiel 8.4.1

$$R_1=\left(10\pm 0,1\right)\Omega$$
$$R_2=\left(5\pm 0,02\right)\Omega$$

$$\frac{1}{\bar{R}}=\frac{1}{\bar{R}_1}+\frac{1}{\bar{R}_2}\qquad\qquad \frac{1}{R}=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10}\Omega$$

$$\frac{1}{R}=\frac{3}{10}\quad\Rightarrow\quad R=\frac{10}{3}$$

$$\left|\Delta\left(\frac{1}{R}\right)\right|\le\left|\Delta\left(\frac{1}{R_1}\right)\right|+\left|\Delta\left(\frac{1}{R_2}\right)\right|$$

$$\Rightarrow\left|\Delta\left(\frac{1}{R_1}\right)\right|\le\frac{\left|\Delta R_1\right|}{\bar{R}_1*R_1}$$

$$\Rightarrow\Delta\left(\frac{1}{R_1}\right)\le\frac{0,1}{9,9*10}$$

$$\Rightarrow\left|\Delta\left(\frac{1}{R_1}\right)\right|\le\frac{1}{990}\Omega$$

$$\Rightarrow\left|\Delta\left(\frac{1}{R_2}\right)\right|\le\frac{\left|\Delta R_2\right|}{\bar{R}_2*R_2}$$

$$\Rightarrow\Delta\left(\frac{1}{R_2}\right)\le\frac{0,02}{4,98*5}$$

$$\Rightarrow\left|\Delta\left(\frac{1}{R_2}\right)\right|\le\frac{1}{1245}\Omega$$

$$\left|\Delta\frac{1}{R}\right|\le\frac{1}{990}\Omega+\frac{1}{1245}\Omega<\frac{2}{1000}\Omega+\frac{1}{1000}\Omega\approx\frac{3}{1000}\Omega$$

$$\frac{\Delta \frac{1}{R}}{\frac{1}{\bar{\bar{R}}}} \leq -\frac{\Delta R}{R} \Rightarrow \Delta R = -R * \bar{R} * \Delta\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$\frac{\Delta R}{\bar{\bar{R}}} = -R * \Delta\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{10}{3} - \frac{3}{1000} = -\frac{1}{100}$$

Ermittlung des prozentualen Wertes des Fehlers:

$$\frac{\Delta R}{\bar{\bar{R}}} * 100\%$$

Bezogen auf das Beispiel ergibt sich:

$$-\frac{1}{100} * 100\% < 1\%$$

9 Funktionen mit einer reellen Veränderlichen

9.1 Grundlegende Eigenschaften von Funktionen

Eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen ist eine Vorschrift, die jedem Element einer Teilmenge D von $\mathbb{R}$ genau eine reelle Zahl zuordnet.

$f : D \to \mathbb{R}$ (lies: „f zu D geht über $\mathbb{R}$)
$x \to y = f(x)$

y heißt das Bild von x unter f
x heißt ein Urbild von y unter f
D heißt der Definitionsbereich von f
$W := \{ y \in \mathbb{R} \mid \textit{Es gibt ein } x \in D \textit{ mit der Eigenschaft } f(x) = y \}$
$\Rightarrow W := \{ f(x) \mid x \in D \}$ (W heißt Wertebereich von f)
$G(f) := \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x) \}$ heißt der Graph von f

Es gibt für jedes y = f(x) mehrere Werte.
Für jedes x gibt es jedoch nur einen Wert f(x).

$$y_1 = f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$$

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt umkehrbar, wenn es zu jedem $y \in \mathbb{R}$ höchstens ein $x \in D$ mit y = f(x) gibt.

f sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine umkehrbare Funktion mit dem Wertebereich W, dann heißt die Funktion, die jedem $y \in W$ das eindeutig bestimmte $x \in D$ mit y = f(x) zuordnet, die Umkehrfunktion von f, in Zeichen f^{-1}.

Beispiel:

$$f: D \to [-1, \infty[$$
$$y = f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$$

Bestimmung der Umkehrfunktion

$$y = \sqrt{x^3 + 1}$$
$$y^2 = x^3 + 1$$
$$y^2 - 1 = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{y^2 - 1} = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \qquad W = [0, \infty[$$

$$f^{-1}: [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

Prüfen der Umkehrbarkeit:

Funktion nach x lösen und prüfen, ob es für jedes x nur ein eindeutig bestimmtes y gibt.

Beispiele:

1) $$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = e^x$$

2)

$$\sin(x): \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \to \quad \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow (\sin(x))^{-1}: [-1, 1] \quad \to \quad \mathbb{R}$$
$$W(\sin(x))^{-1} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Stetigkeit von Funktionen:

Eine Funktion f heißt stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\partial > 0$ gibt, sodass aus $|x - x_0| < \partial$ stets $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ folgt.

Beispiel 9.1.2

$$200€ / m^2$$

f (x) sei der Wert des Grundstücks für die Länge $\overline{AP}$
x sei die Strecke $\overline{AP}$, die gemessen wird

$$f(x) = 30x * 200 = 6000x$$
$$|f(x) - f(x_0)| < 50$$
$$|6000x - 6000x_0| < 50$$
$$|6000(x - x_0)| < 50$$
$$6000 * |x - x_0| < 50$$
$$|x - x_0| < \frac{50}{6000} = \frac{1}{120} = 8,3mm$$

Antwort: Eine Abweichung von 8,3 mm ist noch gerade möglich, sodass die Abweichung zwischen dem theoretischen und gemessenem Wert maximal 50 € beträgt.

<u>9.2 Polynome und rationale Funktionen</u>

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

heißt Polynom- oder ganzrationale Funktion.
Wenn $a_n \neq 0$ ist, heißt n der Grad von f.

Beispiele:

Funktionen vom Grad 0:

$f(x) = a^0$ (Bsp.: $f(x) = 3$)

Ganzrationale Funktionen vom Grad 0 heißen <u>konstante Funktionen</u>.

Funktionen vom Grad 1:

$f(x) = a_1 x + a_0$ (Bsp.: $f(x) = 7x + 3$)

Ganzrationale Funktionen vom Grad 1 heißen <u>lineare Funktionen</u>.

Funktionen vom Grad 2:

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad \text{(Bsp.: } f(x) = 3x^2 + 9x + 4\text{)}$$

Ganzrationale Funktionen vom Grad 2 heißen quadratische Funktionen.

Nullstellen einer quadratischen Funktion werden mit der p,q- Formel berechnet.

$$f(x) = 0$$

Scheitelpunkt:

$$a_2\left(x^2 + \frac{a_1}{a_2}x\right) + a_0$$

$$= a_2\left(x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_1^2}{4a_2^2}\right) + a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}$$

$$= a_2\left(x^2 + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}$$

Die untere Gleichung wird auch als Scheitelpunktsform bezeichnet. Es gibt für die Lage des Scheitelpunkts und somit für die Form des Graphen von f immer 2 Möglichkeiten. Entweder ist $a_2 > 0$, dann ist die Kurve nach oben geöffnet. Für $a_2 < 0$ ist die Kurve nach unten geöffnet.

Beispiel 9.2.1

$$\frac{28}{b} = \frac{42}{42-a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{28} = \frac{42-a}{42} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2}{3}(42-a)$$

$$A = a * b$$

$$A = a * \frac{2}{3}(42-a)$$

$$A = -\frac{2}{3}a^2 - 28a$$

Um die Maximale Fläche zu bestimmen nutzt man die Scheitelpunktsform:

$$S = \left(-\frac{28}{2*\left(-\frac{2}{3}\right)} / -\frac{28^2}{4*\left(-\frac{2}{3}\right)} \right)$$

$$\Rightarrow a = 21 \quad b = 14$$

Definition:

Eine rationale Funktion ist ein Quotient aus Polynomfunktionen:

$$h(x)=\frac{a_n x^n+\ldots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+\ldots+b_1 x+b_0}$$

heißt rationale oder gebrochen-rationale Funktion.

$$D(h)=\left\{x\in\mathbb{R} \mid b_m x^m+\ldots+b_1 x+b_0\neq 0\right\}$$

Beispiel:

$$h(x)=\frac{x^3-5x+2}{x^2-5x+6}$$

Bestimmung der Werte x für die f nicht definiert ist:

$$x^2-5x+6=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-6} \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_1=3 \quad x_2=2$$

$$\Rightarrow D(h)=\mathbb{R}\setminus\{2,3\}$$

In der Nähe der Stelle x_2=2 gilt

$$h(x)=\frac{(x-2)\left(x^2+2x-1\right)}{(x-2)(x-3)}=\frac{x^2+2x-1}{x-3}$$

$\Rightarrow$ Die Funktion h hat an der Stelle x_2=2 eine stetig hebbare Definitionslücke.

$$\tilde{h}(x):=\left\{\begin{matrix} h(x),\ falls\ x\neq 2 \\ -7,\ falls\ x=2 \end{matrix}\right\}$$ ist stetig in x=2

In der Nähe der Stelle x_1 = 3 gilt:

h hat an der Stelle x_1=3 eine Polstelle.

Allgemein:

h(x) hat an der Stelle x_0 eine stetig hebbare Definitionslücke, wenn

$$\lim_{x \to x_0} h(x) \in \mathbb{R} \qquad \text{ist.}$$

h(x) hat an der Stelle x_0 eine Polstelle, wenn bei

$$\lim_{x \to x_0} \pm h(x) = \pm\infty \qquad \text{ist.}$$

Beispiel:

$$h(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2} = x + 5 + \frac{12x - 9}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\left(x^3 + 2x^2 - x + 1\right) : \left(x^2 - 3x + 2\right) = x + 5 \quad \mathrm{R} : 12x - 9$$

$$h(x) = x + 5 + \frac{\frac{12}{x} - \frac{9}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} \xrightarrow{x \to \pm\infty} x + 5$$

Die Gerade y = x + 5 heißt Asymptote der Funktion h(x).

9.3 Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen

Potenzfunktionen

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R} \qquad (a \in \mathbb{R})$$
$$x \to x^a$$

Exponentialfunktionen

$$f : \to \mathbb{R} \qquad (a > 0)$$
$$x \to a^x$$

Logarithmusfunktionen

$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \to \log_a(x)$$

9.4 Trigonometrische Funktionen

Jeder Punkt des Einheitskreises im kartesichen Koordinatensystem lässt sich anhand des Winkels α, der zwischen dem Punkt (1/0) und einem weiteren beliebigen Punkt auf dem Kreis gebildet wird, durch die Werte von Trigonometrischen Funktionen ausdrücken.

$$P = (\cos\alpha / \sin\alpha)$$

Geht man dabei zunächst durch den ersten Quadranten (gegen den Urzeigersinn), ist α positiv. Geht man als erstes durch den vierten Quadranten (im Uhrzeigersinn), ist α negativ.

Bogenmaß und Grad:

Möchte man aus dem Einheitskreis im kartesischen Koordinatensystem die Kurve der Sinus-Funktion herleiten, trägt man einfach für jeden Wert α (x-Achse) den zugehörigen Wert Sinus von α (y- Achse) ein.

Die Kosinus Kurve bekommt man durch Verschieben der Sinuskurve um 90° nach links.

Die Kurve zur Tangesfunktion unterscheidet sich dadurch von den anderen beiden, da sie nur in Intervallen definiert ist. Wird der Nenner cos(x) null, hat die Funktion eine Polstelle. Genauer ersichtlich wird dies mit Hilfe des Definitonsbereichs:

$$\tan(x) : \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1) * \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$$

Untersucht man den Grenzwert für eine der nicht definierten Stellen x_n, so geht dieser immer gegen ±∞. Daraus kann man schließen, dass es sich bei den Definitionslücken um Polstellen handelt. Die Kurve der Tangesfunktion läuft im definierten Intervall immer von -∞ bis ∞.

Rechenregeln:

1) $$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

2) $$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

3) $$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

Additionstheoreme:

1) $$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha) * \cos(\beta) + \sin(\beta) * \cos(\alpha)$$

2) $$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha) * \cos(\beta) - \sin(\alpha) * \sin(\beta)$$

3)

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin(\alpha)*\cos(\beta)+\sin(\beta)*\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)*\cos(\beta)-\sin(\alpha)*\sin(\beta)}$$

$$=\frac{\frac{\sin(\alpha)*\cos(\beta)}{\cos(\alpha)*\cos(\beta)}+\frac{\sin(\beta)*\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)*\cos(\beta)}}{1-\frac{\sin(\alpha)*\sin(\beta)}{\cos(\alpha)*\cos(\beta)}}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)*\tan(\beta)}$$

10 Differentialrechnung

10.1 Die Ableitung einer Funktion

Die Ableitung an einer Stelle x_0 einer Funktion f wird allgemein als die Steigung einer Tangente durch den Punkt P_0 mit (x_0/y_0) betrachtet.
Zur Bestimmung der Ableitung an einer Stelle x_0 nimmt man zunächst einen weiteren Punkt P_1 auf dem Graphen von f hinzu und betrachtet die Sekante durch die Punkte P_0 und P_1.

Die Steigung der Sekante kann durch den folgenden Quotienten ausgedrückt werden:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Dieser Quotient heißt Differenzenquotient. Um die Steigung der Tangente zu erhalten, muss das Intervall zwischen x und x_0 immer kleiner werden und sich schließlich null annähern. Dazu wird der Grenzwert des Differenzenquotienten für x gegen x_0 gebildet.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

Ableitung am Punkt P_0 = Grenzwert $x \to x_0$ des Differenzenquotienten

Beispiel:

$$f(x)=x^2$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{(x-x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}x+x_0=2x_0$$

$\Rightarrow$ Die Ableitung von $f(x)=x^2$ ist $f'(x)=2x$.

$f'(x_0)$ heißt die Ableitung von f an der Stelle x_0.

Eine differenzierbare Funktion f hat einen „glatten“ Graphen (ohne Ecken).

Gleichung der Tangente an dem Graphen der Funktion y = f(x) im Punkt $P(x_0/y_0)$

$$y = f'(x_0) * (x - x_0) + f(x_0)$$

Beispiel:

Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $y = x^2$ im Punkt (3/9)??

$$y = 2 * 3 * (x - 3) + 9$$
$$y = 6x - 9$$

10.2 Ableitungsregeln

Funktion	Ableitung
x^n	$n * x^{n-1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Beispiele:

1) $f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) $f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (-2) * \frac{1}{x^3} = -\frac{2}{x^3}$

3) $f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1$

4) $f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$

Funktion	Ableitung	Bezeichnung
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$	Summenregel
$c * f(x)$	$c * f'(x)$	Faktorregel
$f(x) * g(x)$	$f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$	Produktregel
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{g^2(x)}$	Quotientenregel
$f(g(x))$	$f'(g(x)) * g(x)$	Kettenregel

Beispiel:

1)
$$f(x) = \frac{10 - x^2}{x} = \frac{10}{x} - x$$
$$f'(x) = -\frac{10}{x^2} - 1$$

2)
$$f(x) = e^x * \sin(x)$$
$$f'(x) = e^x * \sin(x) + e^x * = e^x\left(\sin(x) + \cos(x)\right)$$

3)
$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x^3 - x + 1}$$
$$f'(x) = \frac{(2x - 4)\left(x^3 - x + 1\right) - \left(x^2 - 4x + 5\right)\left(3x^2 - 1\right)}{\left(x^3 - x + 1\right)^2}$$

4)
$$f(x) = \tan(x)$$
$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(x) * \cos(x) - \sin(x) * \sin(x)}{\cos^2(x)}$$
$$= \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

5)
$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} * 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

10.3 Extrema

Monotonie von Funktionen:

Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in D$ gilt, dann ist f streng monoton wachsend.

Wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in D$ gilt, dann ist f streng monoton fallend.

Krümmung von Funktionsgraphen:

Es gibt Konvex (rechtsseitig) und Konkav (linksseitig) gekrümmte Graphen.
Um den Unterschied zwischen Konvex und Konkav besser verstehen zu können, sagt man auch:

„Der Buckel vom Schaf ist konkav."

Dieses Verhalten von Funktionsgraphen wird durch die zweite Ableitung einer Funktion f bestimmt. Dabei spielt keine Rolle, ob die erste Ableitung positiv oder negativ ist.

Maxima und Minima von Funktionen:

Hier wird zwischen absoluten Maxima/Minima und lokalen Maxima/Minima unterschieden. Ein absolutes Maximum/Minimum ist der höchste/niedrigste Funktionswert des gesamten Definitionsbereichs D. Ein lokales Maximum/Minimum ist der höchste/niedrigste Funktionswert eines Intervalls einer Funktion.

An einer Extremstelle ist der Wert der Tangentensteigung immer 0. Daraus ergibt sich folgende Notwendigkeit für das Vorhandensein einer Extremstelle an der Stelle x_0 einer Funktion f(x):

$$f'(x) = 0$$

Es gibt Funktionen, die dieses Kriterium erfüllen, jedoch keinen Extremwert an jeder Stelle x_0 haben. Diese Funktionen besitzen an der Stelle einen Sattelpunkt.

Die Bedeutung der 2. Ableitung für Extrema

Hinreichendes Kriterium:
Wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$ gilt, dann hat f in x_0 eine Extremstelle und zwar ein Maximum, falls $f''(x) < 0$ und ein Minimum, falls $f''(x) > 0$.

Beispiel:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 4$$
$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$$
$$f''(x) = 6x - 18$$

$$3x^2 - 18x + 15 = 0$$
$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 5}$$
$$\Rightarrow x_1 = 5 \quad x_2 = 1$$

Prüfung der Extremstellen mit der 2. Ableitung:

$$f''(5) > 0 \quad \rightarrow \quad Minimum\ bei\ x = 5$$
$$f''(1) < 0 \quad \rightarrow \quad Maximum\ bei\ x = 1$$

Beispiel 10.3.1

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 + \pi d h$$
$$V = \frac{\pi}{4} d * h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{4V}{\pi d^2}$$
$$A(d) = \frac{\pi}{2} d^2 + \pi d * \frac{4V}{\pi d^2}$$
$$\Rightarrow A(d) = \frac{\pi}{2} d^2 + \frac{4V}{d}$$
$$A'(d) = \pi d + \frac{-4V}{d}$$
$$A'(d) = 0 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

$$A''(d) = \pi + \frac{8V}{d^3}$$
$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right) = 3\pi > 0$$

Aus $3\pi > 0$ folgt, A(d) hat ein Minimum für $\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

Die Oberfläche einer Dose ist also bei gegebenem Volumen minimal für

$$d = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Verhältnis d zu h:

$$\frac{d}{h} = \frac{\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}}{\frac{4V}{\pi d^2}} = \frac{\pi}{4V} * d^3 = \frac{\pi}{4V} * \frac{4V}{\pi} = 1$$

Antwort: Das Verhältnis von Durchmesser zu Höhe bei einer Dose, die bei gegebenem Volumen eine möglichst keine Oberfläche haben soll, ist 1:1.