Tutorium Mathe 2 MT

Probeklausur für Mathe 2 (Medientechnik, WS09/10)

Hinweise zur Bearbeitung

Die Aufgaben sind auf den vorgegebenen Aufgabenzetteln zu bearbeiten. Für Nebenrechnungen dürfen separate Zettel genutzt werden. Gewertet wird allerdings nur, was auf den Aufgabenzetteln berechnet worden ist. Sollte der Platz unter den Aufgaben nicht ausreichen, kann auf weiteren Zetteln, die vorne ausliegen, weitergerechnet werden. Als Lösung gelten grundsätzlich der Lösungsweg inklusive aller wichtigen Zwischenschritte und das Endergebnis.

WICHTIG!!

Auch ein falsches Endergebnis kann bei kleinen Fehlern in der Rechnung zu voller Punktzahl führen. Dazu muss allerdings der Rechenweg zum Ergebnis korrekt sein!

Hilfsmittel

Als Hilfsmittel kann eine selbst geschriebene Formelsammlung auf einer DIN-A4 Seite (beidseitig beschrieben oder 2 einseitig beschriebene Seiten) verwendet werden. Taschenrechner und Computer-Algebra-Systeme sind verboten.

Bearbeitungszeit

Pro Aufgabe sind durchschnittlich etwa 15 Minuten Bearbeitungszeit vorgesehen.

Aufgabe 1: Taylorreihen

Bestimmen Sie die ersten drei Glieder der Taylorreihenentwicklung der Funktion $f(x) = x^x$ mit der Entwicklungsmitte $x_0 = 1$.

Lösung:

Taylorentwicklung für x^x:

$$f(x) = x^x \rightarrow f(1) = 1$$

$$f'(x) \rightarrow x^x = e^{x\cdot\ln(x)} \rightarrow \left(e^{x\cdot\ln(x)}\right)' = \left(\ln(x)+1\right)\cdot e^{x\cdot\ln(x)} = x^x\cdot\left(\ln(x)+1\right) \rightarrow f'(1) = 1$$

$$\begin{aligned} f''(x) &\rightarrow \left(e^{x\cdot\ln(x)}\cdot\left(\ln(x)+1\right)\right)' = \left(\left(\ln(x)+1\right)\cdot e^{x\cdot\ln(x)}\right)\cdot\left(\ln(x)+1\right) + e^{x\cdot\ln(x)}\cdot\frac{1}{x} \\ &= \left(\ln(x)\cdot e^{x\cdot\ln(x)} + e^{x\cdot\ln(x)}\right)\cdot\left(\ln(x)+1\right) + x^{x-1} \\ &= \ln(x)^2\cdot x^x + 2\cdot\ln(x)\cdot x^x + x^x + x^{x-1} \\ &= x^{x-1}\cdot\left(x\cdot\ln(x)^2 + 2x\cdot\ln(x) + x + 1\right) \\ &\rightarrow f''(1) = 2 \end{aligned}$$

Taylorreihenansatz:

$$f(x) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \ldots$$

Aufgabe 2: Fourierreihen

Die Funktion $f(x)=\frac{x^2}{4}$ sei auf dem Intervall $[0,5]$ stetig und mit der Periodenlänge $T=5$ auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

Lösung:
Die Funktion ist weder gerade noch ungerade, daher müssen alle Fourierkoeffizienten berechnet werden.

$$a_0=\frac{2}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx=\frac{2}{5}\cdot\int_0^5 \frac{x^2}{4}\,dx=\frac{1}{10}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^5=\frac{1}{10}\cdot\frac{125}{3}=\frac{25}{6}$$

$$a_k=\frac{2}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cdot\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot x\right)dx=\frac{1}{10}\cdot\int_0^5 x^2\cdot\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{5}\cdot x\right)dx$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\left(\left.\frac{5x^2\cdot\sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{5}\cdot x\right)}{2\pi\cdot k}\right|_0^5-\frac{5}{\pi\cdot k}\cdot\int_0^5 x\cdot\sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{5}\cdot x\right)dx\right)$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{5}{\pi\cdot k}\cdot\left(\left.-\frac{5x\cdot\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{5}\cdot x\right)}{2\pi\cdot k}\right|_0^5+\frac{5}{2\pi\cdot k}\cdot\int_0^5\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{5}\cdot x\right)dx\right)\right)$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{5}{\pi\cdot k}\cdot\left(-\frac{25}{2\pi\cdot k}+\frac{5}{2\pi\cdot k}\cdot\left.\frac{5\cdot\sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{5}\cdot x\right)}{2\pi\cdot k}\right|_0^5\right)\right)$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{125}{2\pi^2\cdot k^2}=\frac{25}{4\pi^2\cdot k^2}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot x\right) dx = \frac{1}{10} \cdot \int_0^5 x^2 \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{5} \cdot x\right) dx$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left(\left. -\frac{5x^2 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{5} \cdot x\right)}{2\pi \cdot k} \right|_0^5 + \frac{5}{\pi \cdot k} \cdot \int_0^5 x \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{5} \cdot x\right) dx \right)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left(-\frac{125}{2\pi \cdot k} + \frac{5}{\pi \cdot k} \cdot \left(\left. \frac{5x \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{5} \cdot x\right)}{2\pi \cdot k} \right|_0^5 - \frac{5}{2\pi \cdot k} \cdot \int_0^5 \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{5} \cdot x\right) dx \right) \right)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left(-\frac{125}{2\pi \cdot k} + \frac{5}{\pi \cdot k} \cdot \left(\left. \frac{5 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{5} \cdot x\right)}{2\pi \cdot k^2} \right|_0^5 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left(-\frac{125}{2\pi \cdot k} + \frac{5}{\pi \cdot k} \cdot \left(\frac{5}{2\pi \cdot k^2} - \frac{5}{2\pi \cdot k^2} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot -\frac{125}{2\pi \cdot k} = -\frac{25}{4\pi \cdot k}$$

Die Fourierreihe von f lautet:

$$\frac{25}{12} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{25}{4\pi^2 \cdot k^2} \cdot \cos(kx) - \frac{25}{4\pi \cdot k} \cdot \sin(kx)$$

Aufgabe 3: Lineare Algebra

Gegeben ist das folgende LGS $\left(A\,|\,\vec{b}\right)$:

$$\begin{aligned} x+4y-2z&=-1\\ 2x-7y+4z&=2\\ -x+2y-z&=1 \end{aligned}$$

a) Prüfen Sie das LGS mit Hilfe von Matrizendeterminanten auf Lösbarkeit.
b) Finden Sie einen Vektor $\vec{c}$, der zum Ergebnisvektor $\vec{b}$ orthogonal ist.
c) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{d}$, der senkrecht auf $\vec{b}$ und $\vec{c}$ steht.

Lösung:

a) Als erstes bestimmt man die Determinante der Koeffizienten-Matrix A.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2\\ 2 & -7 & 4\\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 7-16-8+14-8+8=-3$$

$$\Rightarrow Rg\left(A\right)=3$$

Da das System keine unbestimmten Parameter auf der rechten Seite hat, die über die Lösbarkeit entscheiden, gilt $Rg\left(A\right)=Rg\left(A\,|\,\vec{b}\right)=3$.

Das System ist also lösbar und hat einen 0-dimensionalen Lösungsraum (Punkt/Ortsvektor).

b) Zwei Vektoren sind orthogonal zu einander, wenn ihr Skalarprodukt null ergibt. Gesucht ist also ein Vektor $\vec{c}$, sodass gilt $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$. Ausnahme ist hierbei der Nullvektor!! Für die Wahl der Vektorelemente gibt es verschiedene Möglichkeiten, die ein korrektes Ergebnis liefern.

$$\begin{aligned} &z.B.\\ &-c_1+2\cdot c_2+c_3=0\\ &\Rightarrow c_1=3, c_2=1, c_3=1 \end{aligned}$$

c) Jene Rechnung wird per Kreuzprodukt durchgeführt.

$$\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\3-(-1)\\-1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\-7\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Differentialgleichungen 1. Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL und lösen Sie das Anfangswertproblem $y(1)=3$.

$$y'=\frac{1+2x^2}{2xy^2}$$

Lösung:
Bestimmung der allgemeinen Lösung der DGL (Typ: Trennung der Veränderlichen):

$$y'=\frac{1+2x^2}{2xy^2};\quad y(1)=3$$

$$2y^2y'=\frac{1+2x^2}{x}\qquad \left(y'=\frac{dy}{dx}\right)$$

$$2y^2dy=\frac{1+2x^2}{x}dx$$

$$\int 2y^2dy=\int\frac{1+2x^2}{x}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2x^2}{x}\right)dx$$

$$\frac{2}{3}y^3=\ln(|x|)+x^2+c\qquad (c\in\mathbb{R})$$

$$y^3=\frac{3}{2}\cdot\ln(|x|)+\frac{3}{2}\cdot x^2+c$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{3}{2}\cdot\ln(|x|)+\frac{3}{2}\cdot x^2+c}$$

Lösen des AWP $y(1)=3$:

$$3=\sqrt[3]{\frac{3}{2}\cdot\ln(1)+\frac{3}{2}+c}$$

$$3=\sqrt[3]{\frac{3}{2}+c}$$

$$27=\frac{3}{2}+c$$

$$c=\frac{51}{2}$$

Aufgabe 5: **Differentialgleichungen 2. Ordnung**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden inhomogenen DGL

$$y''+2y'+8y=4\cdot\cos(2t).$$

Lösung:

Die rechte Seite der DGL weist darauf hin, dass in diesem Fall ein spezieller Ansatz genutzt werden sollte, um die partikuläre Lösung $y_p(t)$ der inhomogenen DGL zu finden. Zunächst wird allerdings die allgemeine Lösung der homogenen DGL $y_h(t)$ berechnet.

$$\lambda^2+2\lambda+8=0$$
$$\rightarrow \lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{-7}=-1\pm i\sqrt{7}\Rightarrow Schwingfall$$
$$\Rightarrow y_h(t)=C_1\cdot e^{-t}\cdot\cos\left(\sqrt{7}t\right)+C_2\cdot e^{-t}\cdot\sin\left(\sqrt{7}t\right)$$

Dann wird nach dem speziellen Ansatz weitergerechnet, um eine partikuläre Lösung $y_p(t)$ der inhomogenen DGL zu finden.

Ansatz:

$$\left(a_0+a_1\cdot t+...+a_n\cdot t^n\right)\cdot e^{\gamma t}\cdot\cos(\beta t)\ mit\ a_0=4,\gamma=0,\beta=2$$
$$\gamma+i\beta=0+i2=i2$$
$$\rightarrow Einsetzen\ in\ y_h(t):$$
$$i2^2+2\cdot i2+8=0\Rightarrow 4+i4\neq 0\longrightarrow k=0$$

$$y_p(t)=A_0\cdot\cos(2t)+B_0\cdot\sin(2t)$$
$$y_p'(t)=-2\cdot A_0\cdot\sin(2t)+2\cdot B_0\cdot\cos(2t)$$
$$y_p''(t)=-4\cdot A_0\cdot\cos(2t)-4\cdot B_0\cdot\sin(2t)$$

$$\rightarrow Einsetzen\ in\ Ausgangs-DGL:\ y''+2y'+8y=4\cdot\cos(2t)$$
$$-4\cdot A_0\cdot\cos(2t)-4\cdot B_0\cdot\sin(2t)+2\cdot\left(-2\cdot A_0\cdot\sin(2t)+2\cdot B_0\cdot\cos(2t)\right)+...$$
$$...8\cdot\left(A_0\cdot\cos(2t)+B_0\cdot\sin(2t)\right)=4\cdot\cos(2t)$$
$$\left(4\cdot A_0+4\cdot B_0\right)\cdot\cos(2t)+\left(4\cdot B_0-4\cdot A_0\right)\cdot\sin(2t)=4\cdot\cos(2t)$$

Die gesuchten Größen kann man nun per LGS ermitteln:

$$4\cdot A_0+4\cdot B_0=4$$
$$-4\cdot A_0+4\cdot B_0=0$$

Jenes wird per Cramerscher Regel gelöst:

$$A_0 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$$B_0 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

Die partikuläre Lösung der DGL lautet:

$$y_p(t) = \frac{1}{2} \cdot \cos(2t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2t)$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Summe der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL $y_h(t)$ und der ermittelten partikulären Lösung $y_p(t)$ der inhomogenen DGL.

$$y(t) = C_1 \cdot e^{-t} \cdot \cos\left(\sqrt{7}t\right) + C_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin\left(\sqrt{7}t\right) + \frac{1}{2} \cdot \cos(2t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2t)$$

Aufgabe 6: Integralrechnung

Berechnen Sie das folgende Integral.

$$\int_0^{100} \frac{x^2-1}{x+3}\,dx$$

Lösung:
Zunächst muss der Bruchterm durch Polynomdivision vereinfacht werden:

$$\begin{array}{l}
\left(x^2-1\right):\left(x+3\right)=x-3+\dfrac{8}{x+3} \\
\underline{-\left(x^2+3x\right)} \\
\qquad -3x-1 \\
\quad \underline{-\left(-3x-9\right)} \\
\qquad\qquad 8
\end{array}$$

Von dem Ergebnis der Polynomdivision kann nun das Integral mit Hilfe der Summenregel berechnet werden:

$$\rightarrow \int_0^{100} x\,dx-3\cdot\int_0^{100} 1\,dx+8\cdot\int_0^{100}\frac{1}{x+3}\,dx$$

$$=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{100}-3\cdot x\Big|_0^{100}+8\cdot\ln\left(\left|x+3\right|\right)\Big|_0^{100}$$

$$=5000-300+8\cdot\left(\ln(103)-\ln(3)\right)$$

$$=4700+8\cdot\ln\left(\frac{103}{3}\right)$$