Tutorium Mathe 2 MT

Probeklausur für Mathe 2 (Medientechnik, SS 2010)

Hinweise zur Bearbeitung

Die Aufgaben sind auf den vorgegebenen Aufgabenzetteln zu bearbeiten. Für Nebenrechnungen dürfen separate Zettel genutzt werden. Gewertet wird allerdings nur, was auf den Aufgabenzetteln berechnet worden ist. Sollte der Platz unter den Aufgaben nicht ausreichen, kann auf weiteren Zetteln weitergerechnet werden. Als Lösung gelten grundsätzlich der Lösungsweg inklusive aller wichtigen Zwischenschritte und das Endergebnis.

WICHTIG!!

Auch ein falsches Endergebnis kann bei kleinen Fehlern in der Rechnung zu voller Punktzahl führen. Dazu muss allerdings der Rechenweg zum Ergebnis korrekt sein!

Hilfsmittel

Als Hilfsmittel kann eine selbst geschriebene Formelsammlung auf einer DIN-A4 Seite (beidseitig beschrieben oder 2 einseitig beschriebene Seiten) verwendet werden. Elektronische Hilfsmittel sind verboten.

Bearbeitungszeit

Pro Aufgabe sind durchschnittlich 15 Minuten Bearbeitungszeit vorgesehen.

Aufgabe 1: Anwendung der Integralrechnung

Berechnen Sie die Länge des Graphen der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\, f(x)=\frac{1}{4}x^2-\ln\left(\sqrt{x}\right)$ im Intervall $\left[1,e^2\right]$.

$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2-\ln\left(\sqrt{x}\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}=\frac{x^2-1}{2x}$$

$$f'(x)^2=\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2$$

$$s=\int_1^{e^2}\sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}\,dx=\int_1^{e^2}\sqrt{1+\frac{\left(x^2-1\right)^2}{4x^2}}\,dx=\int_1^{e^2}\sqrt{1+\frac{x^4-2x^2+1}{4x^2}}\,dx$$

$$=\int_1^{e^2}\sqrt{\frac{4x^2}{4x^2}+\frac{x^4-2x^2+1}{4x^2}}\,dx=\int_1^{e^2}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{4x^2}}\,dx=\int_1^{e^2}\sqrt{\frac{\left(x^2+1\right)^2}{4x^2}}\,dx=\int_1^{e^2}\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_1^{e^2}x\,dx+\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\,dx\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^{e^2}+\ln\left(|x|\right)\Big|_1^{e^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e^4-1}{2}+2\right)=\frac{e^4+3}{4}$$

Aufgabe 2: Uneigentliche Integrale

Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2}\, dx$.

$SUB:$

$$t = -x^2 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \frac{dt}{-2x}$$

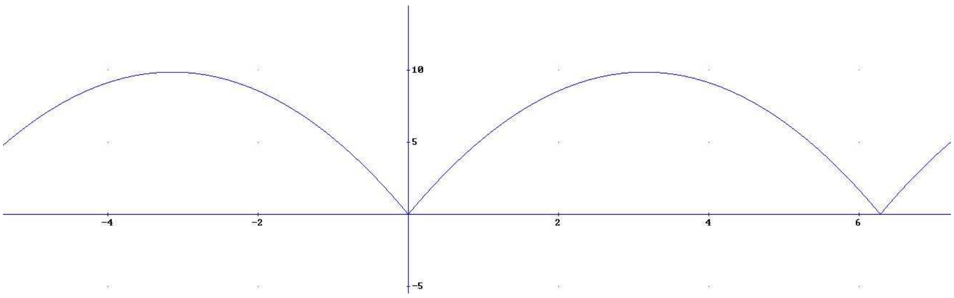
$$\int_0^b x \cdot e^{-x^2} dx = \int_1^{-b^2} x \cdot e^t \cdot \frac{dt}{-2x} = -\frac{1}{2} \cdot \int_1^{-b^2} e^t dt = -\frac{1}{2} \cdot e^t \Big|_1^{-b^2} = -\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} \Big|_0^b$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\lim_{b\to\infty} e^{-x^2} - 1\right) = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 3: Fourier-Reihen

Die Funktion $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ sei auf dem Intervall $\left[0,2\pi\right]$ definiert als $f\left(x\right)=x\left(2\pi-x\right)$ und 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt (Skizze!). Berechnen Sie die Fourier-Reihe von f.

Skizze der Funktion:



Aus der Skizze kann man erkennen, dass die Funktion gerade ist, die Berechnung der Sinusanteile b_k entfällt daher.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}2\pi x-x^2dx=\frac{1}{\pi}\cdot\left(2\pi\cdot\int_0^{2\pi}x\,dx-\int_0^{2\pi}x^2dx\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\left(2\pi\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{2\pi}-\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{2\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left(4\pi^3-\frac{8\pi^3}{3}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{12\pi^3}{3}-\frac{8\pi^3}{3}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{4\pi^3}{3}=\frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\left(2\pi x-x^2\right)\cdot\cos\left(kx\right)dx$$

$$\pi\cdot a_k=\frac{\left(2\pi x-x^2\right)\cdot\sin\left(kx\right)}{k}\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{2}{k}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\pi-x\right)\cdot\sin\left(kx\right)dx$$

$$=-\frac{2}{k}\cdot\left(-\frac{\left(\pi-x\right)\cdot\cos\left(kx\right)}{k}\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{1}{k}\cdot\int_0^{2\pi}\cos\left(kx\right)\right)$$

$$=-\frac{2}{k}\cdot\left(\frac{-\pi+2\pi}{k}+\frac{\pi}{k}+\frac{1}{k}\cdot\frac{\sin\left(kx\right)}{k}\Bigg|_0^{2\pi}\right)$$

$$=-\frac{2}{k}\cdot\frac{2\pi}{k}$$

$$\pi\cdot a_k=-\frac{4\pi}{k^2}\rightarrow a_k=-\frac{4}{k^2}$$

Fourier-Reihe von f:

$$\frac{2\pi^2}{3}-4\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kx\right)}{k^2}$$

Aufgabe 4: Fourier-Transformationen

Berechnen Sie die Fourier Transformierte der Funktion

$$x(t)=\begin{cases} e^{-\frac{t}{2}}, \; f\ddot{u}r\, t\geq 0 \\ e^{\frac{t}{2}}, \; f\ddot{u}r\, t\leq 0 \end{cases}$$

$$\hat{f}(i\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{t}{2}}\cdot e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}\cdot e^{-i\omega t}dt\right)$$

$$2\pi\cdot\hat{f}(i\omega)=\int_{-\infty}^{0} e^{t\cdot\left(\frac{1}{2}-i\omega\right)}dt+\int_{0}^{\infty} e^{t\cdot\left(-\frac{1}{2}-i\omega\right)}dt$$

$$=\left.\frac{e^{t\cdot\left(\frac{1}{2}-i\omega\right)}}{\frac{1}{2}-i\omega}\right|_{-\infty}^{0}+\left.\frac{e^{t\cdot\left(-\frac{1}{2}-i\omega\right)}}{-\frac{1}{2}-i\omega}\right|_{0}^{\infty}$$

$$=\left(\frac{1}{\frac{1}{2}-i\omega}-\lim_{t\to-\infty}\frac{e^{t\cdot\left(\frac{1}{2}-i\omega\right)}}{\frac{1}{2}-i\omega}\right)+\left(\lim_{t\to-\infty}\frac{e^{-t\cdot\left(\frac{1}{2}+i\omega\right)}}{-\frac{1}{2}-i\omega}+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i\omega\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}-i\omega}+\frac{1}{\frac{1}{2}+i\omega}=\frac{\frac{1}{2}+i\omega}{\left(\frac{1}{2}-i\omega\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+i\omega\right)}+\frac{\frac{1}{2}-i\omega}{\left(\frac{1}{2}-i\omega\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+i\omega\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+i\omega+\frac{1}{2}-i\omega}{\frac{1}{4}+\omega^2}=\frac{1}{\frac{1}{4}+\omega^2}$$

$$2\pi\cdot\hat{f}(\omega)=\frac{4}{1+4\omega^2}$$

$$\hat{f}(\omega)=\frac{2}{\pi\cdot\left(1+4\omega^2\right)}$$

Aufgabe 5: Lineare Algebra

Eine Ebene E geht durch den Punkt $P(6,8,2)$ und hat $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ als einen Normalenvektor.

Bestimmen Sie für E eine Ebenengleichung in Parameterform, Koordinatenform, Normalenform und Hesse'scher Normalenform. Welchen Abstand d hat der Punkt $Q(6,3,6)$ von der Ebene E?

Die Normalenform der Ebenengleichung ist durch den Punkt P und den angegebenen Normalenvektor bereits gegeben.

$$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$$

Eine Koordinatengleichung lässt sich mit Hilfe des Normalenvektors aufstellen.

$$x + 3y - 5z = c$$

$$6 + 24 - 10 = c \Rightarrow c = 20$$

$$x + 3y - 5z = 20$$

Eine Parameterform erhält man, indem man die Koordinatenform nach einem Wert auflöst und entsprechend einsetzt.

$$x = 20 - 3y + 5z$$

$$y = y$$

$$z = z$$

$$E: \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zur Ermittlung der Hesse'schen Normalenform muss zunächst ein Normaleneinheitsvektor berechnet werden.

$$|\vec{n}| = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$$

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{35}} \\ \frac{3}{\sqrt{35}} \\ -\frac{5}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}6\\8\\2\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{35}}\\\frac{3}{\sqrt{35}}\\-\frac{5}{\sqrt{35}}\end{pmatrix}=0$$

Der Abstand des Punktes Q von E kann über die Hesse'sche Normalenform ermittelt werden.

$$d=\left|\left(\vec{q}-\vec{p}\right)\cdot\vec{n}_0\right|=\left|\left[\begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\8\\2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{35}}\\\frac{3}{\sqrt{35}}\\-\frac{5}{\sqrt{35}}\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\-5\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{35}}\\\frac{3}{\sqrt{35}}\\-\frac{5}{\sqrt{35}}\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|-\frac{35}{\sqrt{35}}\right|$$

$$=\sqrt{35}$$

Aufgabe 6: Differentialrechnung

Berechnen Sie den Schnittpunkt der Tangentialebenen an den Graphen der Funktion

$$f(x,y)=\frac{8x^2+y^2-4}{4}$$

in den Punkten $P_1(1,1,0)$ und $P_2\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ mit der x-z-Achse.

$$f_x(x,y)=\frac{1}{4}\cdot 16x=4x$$
$$f_y(x,y)=\frac{1}{4}\cdot 2y=\frac{y}{2}$$

$$TE\ f\ddot{u}r\ P_1 \rightarrow z=4(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)+\frac{5}{4}=4x-4+\frac{y}{2}-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}=\frac{16x+2y-13}{4}$$
$$TE\ f\ddot{u}r\ P_2 \rightarrow z=\frac{1}{4}\left(y-\frac{1}{2}\right)-\frac{15}{16}=\frac{4y-17}{16}$$

Für die x-z-Ebene gilt $y=0$. Berechnung des Schnittpunktes per LGS.

$$\begin{aligned} z&=\frac{16x-13}{4} \\ z&=-\frac{17}{16} \end{aligned} \Leftrightarrow -\frac{17}{16}=\frac{16x-13}{4} \Leftrightarrow -\frac{17}{4}=16x-13 \Leftrightarrow \frac{35}{4}=16x \Leftrightarrow \frac{35}{64}=x$$

$$\Rightarrow S\left(\frac{35}{64},0,-\frac{17}{16}\right)$$

Aufgabe 7: Differentialrechnung

Berechnen Sie alle relativen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) \cdot e^{-x}$$

und geben Sie jeweils an, um welche Art von Extremum es sich handelt.

$$f_x(x,y) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} - y^2 \cdot e^{-x} = \left(-x^2 + 2x - y^2\right) \cdot e^{-x}$$
$$f_y(x,y) = 2y \cdot e^{-x}$$

Da e^{-x} nie Null wird, müssen nur die anderen Ausdrücke untersucht werden.

$$\begin{matrix} -x^2 + 2x - y^2 = 0 \\ 2y = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -x^2 + 2x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$$

Man erhält als kritische Stellen:
$(0,0);(2,0)$

$$f_{xx}(x,y) = 2e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} + y^2 \cdot e^{-x} = \left(x^2 - 4x + 2 + y^2\right) \cdot e^{-x}$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -2y \cdot e^{-x}$$
$$f_{yy}(x,y) = 2e^{-x}$$

$$H\ f(x,y) = \begin{pmatrix} \left(x^2 - 4x + 2 + y^2\right) \cdot e^{-x} & -2y \cdot e^{-x} \\ -2y \cdot e^{-x} & 2e^{-x} \end{pmatrix}$$
$$\det\left(H\ f(x,y)\right) = \left(x^2 - 4x + 2 + y^2\right) \cdot 2e^{-2x} - \left(-2y \cdot e^{-x}\right)^2$$

Setzt man die kritischen Stellen ein, erhält man:

$$\det\left(H\ f(0,0)\right) = 4 > 0 \to Extremstelle$$
$$\det\left(H\ f(2,0)\right) = -4 \cdot e^{-4} < 0 \to keine\ Extremstelle$$

$$f_{xx}(0,0) = 2 > 0 \to Minimum$$

Die Funktion besitzt ein lokales Minimum bei $P_1(0,0,1)$.

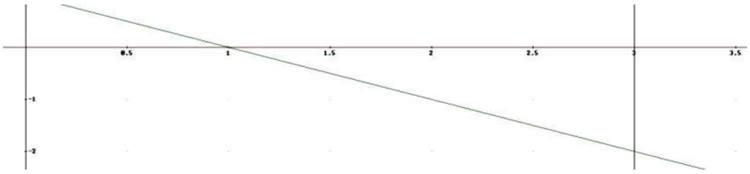
Aufgabe 8: **Integralrechnung**

Berechnen Sie das folgende Integral

$$\iint_D \left(2xy - x^2 - y^2\right) dxdy$$

Dabei sei D jener Bereich, der von den Kurven $y = 1 - x$, $y = 0$ und $x = 3$ eingeschlossen wird.

Skizze:



Berechnung des Integrals:

$$\left|\int_1^3\left(\int_{1-x}^0 2xy - x^2 - y^2\,dy\right)dx\right|$$

$$= \left|\int_1^3\left(xy^2 - x^2y - \frac{y^3}{3}\Big|_{1-x}^0\right)dx\right|$$

$$= \left|-\int_1^3\left(x\left(1-2x+x^2\right) - x^2(1-x) - \frac{(1-x)^3}{3}\right)dx\right| = \left|-\int_1^3\left(x - 2x^2 + x^3 - x^2 + x^3 - \frac{-x^3+3x^2-3x+1}{3}\right)dx\right|$$

$$= \left|\int_1^3\left(\frac{-7x^3+12x^2-6x+1}{3}\right)dx\right| = \left|-\frac{7}{3}\int_1^3 x^3dx + 4\cdot\int_1^3 x^2dx - 2\cdot\int_1^3 x\,dx + \frac{1}{3}\int_1^3 1\,dx\right|$$

$$= \left|-\frac{7}{3}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_1^3 + 4\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^3 - 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^3 + \frac{1}{3}\cdot x\Big|_1^3\right|$$

$$= \left|-\frac{567}{12} + \frac{7}{12} + \frac{108}{3} - \frac{4}{3} - 9 + 1 + 1 - \frac{1}{3}\right|$$

$$= \left|-\frac{140}{3} + \frac{103}{3} - \frac{21}{3}\right|$$

$$= \frac{58}{3}$$

Aufgabe 9: Integralrechnung

Welches Volumen hat ein Körper, der durch Rotation der Kurve $f(x) = 1 + \sin(x)$ im Bereich $0 \le x \le 2\pi$ entsteht. Bestimmen Sie außerdem die Masse des Körpers, wenn die Dichte seines Materials $\rho = \frac{1}{\pi^3}$ beträgt.

(Hinweis: Transformation auf Zylinderkoordinaten)

Zunächst werden die entsprechenden Werte für die Grenzen transformiert. Diese ergeben sich aus der Aufgabenstellung.

$$0 \le r \le 2\pi$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi$$
$$0 \le z \le 1 + \sin(r)$$

Entsprechend dieser Grenzen wird nun das Integral berechnet.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{1+\sin(r)} r\,dz\right)d\varphi\right)dr &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} r\cdot z\Big|_0^{1+\sin(r)}\,d\varphi\right)dr \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} r+\sin(r)\,d\varphi\right)dr \\
&= \int_0^{2\pi} r+\sin(r)\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}\,dr = 2\pi\int_0^{2\pi} r+\sin(r)\,dr \\
&= 2\pi\cdot\left(\frac{r^2}{2}-\cos(r)\Big|_0^{2\pi}\right) \\
&= 2\pi\cdot\left(\left(2\pi^2-1\right)+1\right) \\
&= 4\pi^3
\end{aligned}$$

Die Masse des Körpers ergibt sich aus dem Volumen und der angegebenen Dichte.

$$m = \rho\cdot V = \frac{1}{\pi^3}\cdot 4\pi^3 = 4$$

Aufgabe 10: Differentialgleichungen 1. Ordnung

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'+2y=e^{2x}+x,\quad y(0)=2$$

Es liegt eine lineare DGL 1.Ordnung mit Konstanten Koeffizienten vor, welche durch Variation der Konstanten gelöst werden kann.

Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$y'+2y=0$$

$$\int\frac{1}{y}\,dy=-\int 2\,dx$$

$$\ln(y)=-2x+c$$

$$y=e^{-2x}\cdot C$$

Lösung der zugehörigen inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten:

$$y_p(x)=e^{-2x}\cdot C(x)$$

$$y_p'(x)=-2e^{-2x}\cdot C(x)+e^{-2x}\cdot C'(x)=e^{-2x}\left(-2C(x)+C'(x)\right)$$

$$\cancel{-2e^{-2x}\cdot C(x)}+e^{-2x}\cdot C'(x)\cancel{+2e^{-2x}\cdot C(x)}=e^{2x}+x$$

$$C'(x)=e^{2x}\left(e^{2x}+x\right)$$

$$=e^{4x}+x\cdot e^{2x}$$

$$C(x)=\int e^{4x}dx+\int x\cdot e^{2x}dx$$

$$=\frac{e^{4x}}{4}+\left(\frac{x\cdot e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right)$$

$$=\frac{e^{4x}}{4}+e^{2x}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$y_p(x)=e^{-2x}\cdot C(x)=e^{-2x}\cdot\left(\frac{e^{4x}}{4}+e^{2x}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{e^{2x}}{4}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$$

Allgemeine Lösung der DGL:

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=e^{-2x}\cdot C+\frac{e^{2x}}{4}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$$

Lösung des AWP:

$$2=C+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\Rightarrow C=2$$

$$y(x) = 2e^{-2x} + \frac{e^{2x}}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

Aufgabe 11: Differentialgleichungen 2. Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - y' - 6y = 12\cos(3x).$$

Diese DGL kann mit einem speziellen Ansatz gelöst werden, weil ihre Störfunktion durch diesen modelliert werden kann.

Allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix} \Rightarrow Kriechfall$$

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$a_o = 12, \beta = 3, \gamma = 0 \Rightarrow \gamma + i\beta = i3 \Rightarrow k = 0$$

$$y_p(x) = A_0 \cos(3x) + B_0 \sin(3x)$$
$$y_p'(x) = -3A_0 \sin(3x) + 3B_0 \cos(3x)$$
$$y_p''(x) = -9A_0 \cos(3x) - 9B_0 \sin(3x)$$

$$-9A_0 \cos(3x) - 9B_0 \sin(3x) + 3A_0 \sin(3x) - 3B_0 \cos(3x) \ldots$$
$$\ldots - 6A_0 \cos(3x) - 6B_0 \sin(3x) = 12\cos(3x)$$
$$3A_0 \sin(3x) - 3B_0 \cos(3x) - 15A_0 \cos(3x) - 15B_0 \sin(3x) = 12\cos(3x)$$
$$(3A_0 - 15B_0)\sin(3x) + (-15A_0 - 3B_0)\cos(3x) = 12\cos(3x)$$

$$\begin{matrix} 3A_0 - 15B_0 = 0 \\ -15A_0 - 3B_0 = 12 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} A_0 = 5B_0 \\ -75B_0 - 3B_0 = 12 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} A_0 = 5B_0 \\ B_0 = -\frac{12}{78} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} A_0 = -\frac{10}{13} \\ B_0 = -\frac{2}{13} \end{matrix}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - \frac{10}{13}\cos(3x) - \frac{2}{13}\sin(3x)$$

Aufgabe 12: Matrizen und lineare Abbildungen

a) Prüfen Sie, ob die folgende Matrix A invertierbar ist und berechnen Sie gegebenenfalls die Inverse A^{-1}.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Die Matrix A bilde mit dem Vektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$. Prüfen Sie dieses auf Lösbarkeit und bestimmen Sie ggf. die Lösung.

---

a) Die Matrix ist nur dann invertierbar, wenn sie regulär ist, d.h. wenn $\det(A) \neq 0$.

$\rightarrow \det(A) = 2 + 12 - 12 - 1 = 1 \neq 0$

A ist also invertierbar.

Bestimmung von A^{-1}:

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 11 & 2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 11 & 2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -11 & 20 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 11 & 2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 11 & 2 \end{array}\right.$$

b) Das LGS lässt sich folgendermaßen umschreiben.

$A \cdot \vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}$

Die Lösbarkeit wurde bereits durch die Determinanten-Berechnung von A bewiesen. Aus dieser geht hervor, dass $Rg(A) = 3$ ist. Das erweiterte System $(A \mid \vec{y})$ besitzt ebenfalls den Rang 3, weil A eine quadratische Untermatrix des Systems ist. Da $Rg(A) = Rg(A \mid \vec{y})$, ist das System lösbar mit einem 0-dimensionalen Lösungsraum (Punkt/Ortsvektor).

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \\ -6 & 11 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$