Tutorium Mathe 2 MT

Probeklausur für Mathe 2 (Medientechnik, WS10/11)

Hinweise zur Bearbeitung

Als Lösung gelten grundsätzlich der Lösungsweg inklusive aller wichtigen Zwischenschritte und das Endergebnis. Jede Aufgabe erhält die gleiche Punktzahl von 10 Punkten bei korrekter Lösung. Bestanden hätte man mit einem Drittel der Punkte, also 20 Punkten.
Die Abgabe der Klausur zur Korrektur ist freiwillig, die Lösungen werden nach dem Ende der Klausurzeit im Internet zu finden sein, sodass eine Überprüfung der eigenen Ergebnisse möglich ist.

WICHTIG!!
Auch ein falsches Endergebnis kann bei kleinen Fehlern in der Rechnung zu voller Punktzahl führen. Dazu muss allerdings der Rechenweg zum Ergebnis korrekt sein!

Hilfsmittel

Als Hilfsmittel dürfen lediglich Hinweise an den Aufgabenstellungen und eine selbstgeschriebene Formelsammlung (eine beidseitig beschriebene DIN-A4 Seite) verwendet werden. Taschenrechner und Computer-Algebra-Systeme sind verboten.

Bearbeitungszeit

Pro Aufgabe sind durchschnittlich etwa 15 Minuten Bearbeitungszeit vorgesehen.

Aufgabe 1: **Potenzreihen**

Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der folgenden Potenzreihe

$$1+\frac{x}{3\cdot 2}+\frac{x^2}{3^2\cdot 3}+\frac{x^3}{3^3\cdot 4}+\frac{x^4}{3^4\cdot 5}+\dots .$$

Hinweis: Untersuchen Sie auch die Randpunkte des Konvergenzbereichs.

Lösung:

Um den Konvergenzradius festzustellen, formt man zunächst in eine Summendarstellung um.

$$1+\frac{x}{3\cdot 2}+\frac{x^2}{3^2\cdot 3}+\frac{x^3}{3^3\cdot 4}+\frac{x^4}{3^4\cdot 5}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot(n+1)}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Parameter a_n und a_{n+1}:

$$a_n=\frac{1}{3^n\cdot(n+1)},\ a_{n+1}=\frac{1}{3^{n+1}\cdot((n+1)+1)}=\frac{1}{3^{n+1}\cdot(n+2)}$$

Entsprechend ergibt sich für den Konvergenzradius:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n\cdot(n+1)}}{\frac{1}{3^{n+1}\cdot(n+2)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(n+2)}{3^n\cdot(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{3^n}\cdot 3\cdot(n+2)}{\cancel{3^n}\cdot(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot(n+2)}{n+1}$$

$$=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=3\cdot\frac{1}{1}=3$$

Anmerkung: Die Betrag-Striche können direkt weggelassen werden, weil die genutzten Brüche unter der angegebenen Bedingung $n\geq 0$ nicht negativ werden können.

Für die Randpunkte des Konvergenzbereichs ergibt sich:

$$n=-3\Rightarrow 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots\Rightarrow \text{alternierende harmonische Reihe}\Rightarrow \text{Konvergenz}$$

$$n=3\Rightarrow 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots\Rightarrow \text{harmonische Reihe}\Rightarrow \text{Divergenz}$$

Der Konvergenzbereich der angegebenen Potenzreihe ergibt sich somit zu $-3\leq n<3$.

Aufgabe 2: Taylorreihen

Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x)=\ln(\cos(x))$ bis zum 5. Reihenglied (x^4 -Glied) für die Entwicklungsmitte $x_0=0$.

Lösung:

Zunächst werden die benötigten Ableitungen mit Hilfe der entsprechenden Ableitungsregeln berechnet und daraus die Funktionswerte der Entwicklungsmitte berechnet:

$$f(x)=\ln(\cos(x))\Rightarrow f(0)=\ln(1)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos(x)}\cdot-\sin(x)=-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=-\tan(x)\Rightarrow f'(0)=0$$

$$f''(x)=-\frac{\cos(x)\cdot\cos(x)-(\sin(x)\cdot-\sin(x))}{\cos^2(x)}=-\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}=-\frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\Rightarrow f''(0)=-1$$

$$f'''(x)=-\frac{2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)}{\cos^4(x)}=-\frac{2\cdot\sin(x)}{\cos^3(x)}\Rightarrow f'''(0)=0$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{2\cdot\cos(x)\cdot\cos^3(x)-(2\cdot\sin(x)\cdot-3\cdot\cos^2(x)\cdot\sin(x))}{\cos^6(x)}$$

$$=-\frac{2\cdot\cos^4(x)-(-6\cdot\sin^2(x)\cdot\cos^2(x))}{\cos^6(x)}=-\frac{2\cdot\cos^4(x)+6\cdot\sin^2(x)\cdot\cos^2(x)}{\cos^6(x)}$$

$$=-\frac{\cos^2(x)\cdot(2\cdot\cos^2(x)+2\cdot\sin^2(x)+4\cdot\sin^2(x))}{\cos^6(x)}=-\frac{2+4\cdot\sin^2(x)}{\cos^4(x)}$$

$$\Rightarrow f^{(4)}=-2$$

Aus diesen Werten kann nun die Taylorreihe aufgestellt werden:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x^1+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}\cdot x^4+\ldots$$

$$=0+\frac{0}{1}\cdot x^1-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{0}{6}\cdot x^3-\frac{1}{12}\cdot x^4+\ldots$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot x^2-\frac{1}{12}\cdot x^4+\ldots$$

Aufgabe 4: Fourier-Reihen

Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei im Intervall $[0;4]$ stetig und mit $f(t)=\begin{cases} 9 & \text{für } 0\le t\le 2 \\ -\frac{9}{2}t+18 & \text{für } 2\le t<4 \end{cases}$

definiert. Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von f.

Lösung:

Die Funktion ist weder gerade noch ungerade, es müssen also alle Fourier-Koeffizienten berechnet werden. Aus dem Aufgabentext ergibt sich $T=4$.

$$a_0=\frac{2}{4}\cdot\left(9\int_0^2 1\,dt+\int_2^4 -\frac{9}{2}t+18\,dt\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(9t\Big|_0^2+\left(-\frac{9}{2}\int_2^4 t\,dt+18\int_2^4 1\,dt\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(18+\left(-\frac{9t^2}{4}\Bigg|_2^4+18t\Big|_2^4\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(18\left(-36+9+72-36\right)\right)=\frac{27}{2}$$

$$a_k=\frac{1}{2}\cdot\left(9\int_0^2\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt-\frac{9}{2}\int_2^4 t\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt+18\int_2^4\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt\right)$$

$$2\cdot a_k=\frac{18\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}{k\cdot\pi}\Bigg|_0^2-\frac{9}{2}\left(\frac{2t\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}{k\cdot\pi}\Bigg|_2^4-\frac{2}{k\cdot\pi}\int_2^4\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt\right)+\frac{36\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}{k\cdot\pi}\Bigg|_2^4$$

$$=\frac{9}{k\cdot\pi}\left(-\frac{2\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}{k\cdot\pi}\Bigg|_2^4\right)=\frac{9}{k\cdot\pi}\left(-\frac{2}{k\cdot\pi}+\frac{2\cdot(-1)^k}{k\cdot\pi}\right)$$

$$2\cdot a_k=\frac{18\cdot(-1)^k-18}{k^2\cdot\pi^2}$$

$$a_k=\frac{9\cdot(-1)^k-9}{k^2\cdot\pi^2}$$

$$b_k = \frac{1}{2}\cdot\left(9\int_0^2 \sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt - \frac{9}{2}\int_2^4 t\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt + 18\int_2^4 \sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt\right)$$

$$2\cdot b_k = -\left.\frac{18\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}{k\cdot\pi}\right|_0^2 - \frac{9}{2}\left(-\left.\frac{2t\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}{k\cdot\pi}\right|_2^4 + \frac{2}{k\cdot\pi}\int_2^4 \cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt\right) - \left.\frac{36\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}{k\cdot\pi}\right|_2^4$$

$$= \frac{18-18\cdot(-1)^k}{k\cdot\pi} - \frac{9}{2}\left(\frac{4\cdot(-1)^k-8}{k\cdot\pi} + \frac{2}{k\cdot\pi}\left(\left.\frac{2\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}{k\cdot\pi}\right|_2^4\right)\right) + \frac{36\cdot(-1)^k-36}{k\cdot\pi}$$

$$2\cdot b_k = \frac{18\cancel{-18\cdot(-1)^k-18\cdot(-1)^k}\cancel{+36}\cancel{+36\cdot(-1)^k}\cancel{-36}}{k\cdot\pi}$$

$$b_k = \frac{9}{k\cdot\pi}$$

Die Fourier-Reihe von f ergibt sich damit zu:

$$f(t) = \frac{27}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9\cdot(-1)^k-9}{k^2\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right) + \frac{9}{k\cdot\pi}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)$$

$$= \frac{27}{4} + \frac{9}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k-1}{k^2\cdot\pi}\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right) + \frac{1}{k}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t\right)$$

Aufgabe 4: Fourier-Transformation

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega)$ der Funktion $f(t)=\begin{cases} A\cdot e^{-4t} & \textit{für } t\geq 0 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$. Geben Sie außerdem den Gleichanteil $\hat{f}(0)$ an.

Lösung:

$$\hat{f}(\omega)=A\int_0^\infty e^{-4t}\cdot e^{-i\omega t}\,dt=A\int_0^\infty e^{(-4-i\omega)t}\,dt=A\cdot\left.\frac{e^{(-4-i\omega)t}}{-4-i\omega}\right|_0^\infty$$

$$=A\cdot\left(\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-(4+i\omega)t}}{-4-i\omega}-\frac{1}{-4-i\omega}\right)$$

$$=\frac{A}{4+i\omega}$$

$$\hat{f}(0)=A\int_0^\infty e^{-4t}\,dt=-A\cdot\frac{e^{-4t}}{4}=-\frac{A\cdot e^{-4t}}{4}$$

Aufgabe 5: **Lineare Algebra**

Gegeben ist die Matrix A und der Vektor $\vec{b}$:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -7\\ 6 & 4 & -12\\ 3 & -3 & -6\end{pmatrix} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}4\\ 9\\ 2\end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie A^{-1}, die Inverse der Matrix A.

b) Bestimmen Sie die Lösung des LGS $A\cdot\vec{x}=\vec{b}$.

Lösung:

a)

$$\left(\begin{matrix}3 & 5 & -7\\ 6 & 4 & -12\\ 3 & -3 & -6\end{matrix}\right)\left\|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right. \begin{matrix}\\ IIa=II-2\cdot I\\ IIIa=III-I\end{matrix}$$

$$\left(\begin{matrix}3 & 5 & -7\\ 0 & -6 & 2\\ 0 & -8 & 1\end{matrix}\right)\left\|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\right. \begin{matrix}\\ \\ IIIb=3\cdot IIIa-4\cdot IIa\end{matrix}$$

$$\left(\begin{matrix}3 & 5 & -7\\ 0 & -6 & 2\\ 0 & 0 & -5\end{matrix}\right)\left\|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 5 & -4 & 3\end{pmatrix}\right. \begin{matrix}Ia=5\cdot I-7\cdot IIIb\\ IIb=5\cdot IIa+2\cdot IIIb\\ \\ \end{matrix}$$

$$\left(\begin{matrix}15 & 25 & 0\\ 0 & -30 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{matrix}\right)\left\|\begin{pmatrix}-30 & 28 & -21\\ 0 & -3 & 6\\ 5 & -4 & 3\end{pmatrix}\right. \begin{matrix}IIc=-\frac{1}{30}\cdot IIb\\ IIIc=-\frac{1}{5}\cdot IIIb\end{matrix}$$

$$\left(\begin{matrix}15 & 25 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right)\left\|\begin{pmatrix}-30 & 28 & -21\\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5}\\ -1 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\right. Ib=I-25\cdot IIc$$

$$\left(\begin{matrix}15 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right)\left\|\begin{pmatrix}-30 & \frac{255}{10} & -16\\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5}\\ -1 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\right. Ic=\frac{1}{15}\cdot Ib$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{17}{10} & -\frac{16}{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right)$$

Die Matrix A ist damit invertierbar und es gilt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{17}{10} & -\frac{16}{15} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -1 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

b) Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ lässt sich mit Hilfe der Inverse nun lösen:

$$\begin{pmatrix} -2 & \frac{17}{10} & -\frac{16}{15} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -1 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 + \frac{153}{10} - \frac{32}{15} \\ \frac{9}{10} - \frac{2}{5} \\ -4 + \frac{36}{5} - \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{6} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des LGS lautet $\left\{ \frac{31}{6}, \frac{1}{2}, 2 \right\}$.

Aufgabe 6: Differentialgleichungen 2. Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden inhomogenen DGL

$$y''+2y'+8y=\cos\left(-2t\right).$$

Lösung:

Die rechte Seite der DGL weist darauf hin, dass in diesem Fall ein spezieller Ansatz genutzt werden sollte, um die partikuläre Lösung $y_p\left(t\right)$ der inhomogenen DGL zu finden. Zunächst wird allerdings die allgemeine Lösung der homogenen DGL $y_h\left(t\right)$ berechnet.

$$\lambda^2+2\lambda+8=0$$
$$\rightarrow \lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{-7}=-1\pm i\sqrt{7}\Rightarrow Schwingfall$$
$$\Rightarrow y_h\left(t\right)=C_1\cdot e^{-t}\cdot\cos\left(\sqrt{7}t\right)+C_2\cdot e^{-t}\cdot\sin\left(\sqrt{7}t\right)$$

Dann wird nach dem speziellen Ansatz weitergerechnet, um eine partikuläre Lösung $y_p\left(t\right)$ der inhomogenen DGL zu finden.

Ansatz:

$$\left(a_0+a_1\cdot t+...+a_n\cdot t^n\right)\cdot e^{\gamma t}\cdot\cos\left(\beta t\right)\ mit\ a_0=1,\gamma=0,\beta=-2$$
$$\gamma+i\beta=0-i2=-i2$$
$$\rightarrow Einsetzen\ in\ y_h\left(t\right):$$
$$i2^2-2\cdot i2+8=0\Rightarrow 4-i4\neq 0\longrightarrow k=0$$

$$y_p\left(t\right)=A_0\cdot\cos\left(-2t\right)+B_0\cdot\sin\left(-2t\right)$$
$$y_p'\left(t\right)=2\cdot A_0\cdot\sin\left(-2t\right)-2\cdot B_0\cdot\cos\left(-2t\right)$$
$$y_p''\left(t\right)=-4\cdot A_0\cdot\cos\left(-2t\right)-4\cdot B_0\cdot\sin\left(-2t\right)$$

$$\rightarrow Einsetzen\ in\ Ausgangs-DGL: y''+2y'+8y=\cos\left(2t\right)$$
$$-4\cdot A_0\cdot\cos\left(-2t\right)-4\cdot B_0\cdot\sin\left(-2t\right)+2\cdot\left(2\cdot A_0\cdot\sin\left(-2t\right)-2\cdot B_0\cdot\cos\left(-2t\right)\right)+...$$
$$...8\cdot\left(A_0\cdot\cos\left(-2t\right)+B_0\cdot\sin\left(-2t\right)\right)=\cos\left(-2t\right)$$
$$\left(4\cdot A_0-4\cdot B_0\right)\cdot\cos\left(-2t\right)+\left(4\cdot B_0+4\cdot A_0\right)\cdot\sin\left(-2t\right)=\cos\left(-2t\right)$$

Die gesuchten Größen kann man nun per LGS ermitteln:

$$4\cdot A_0-4\cdot B_0=1$$
$$4\cdot A_0+4\cdot B_0=0$$

Jenes wird per Cramerscher Regel gelöst:

$$A_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

$$B_0 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{32} = -\frac{4}{32} = -\frac{1}{8}$$

Die partikuläre Lösung der DGL lautet:

$$y_p(t) = \frac{1}{8} \cdot \cos(-2t) - \frac{1}{8} \cdot \sin(-2t)$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Summe der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL $y_h(t)$ und der ermittelten partikulären Lösung $y_p(t)$ der inhomogenen DGL.

$$y(t) = C_1 \cdot e^{-t} \cdot \cos\left(\sqrt{7}t\right) + C_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin\left(\sqrt{7}t\right) + \frac{1}{8} \cdot \cos(-2t) - \frac{1}{8} \cdot \sin(-2t)$$